

A DESCOBERTA DA MATÉRIA ESCURA

Índice

Páginas	Assunto
02 até 05	– introdução.
05 até 43	– dedução da fórmula do disco emissor de luz.
44 até 65	– dedução da fórmula da esfera emissora de luz.
66 até 73	– o cálculo da velocidade para a curva de rotação da galáxia.
74 e 75	– o cálculo da influência das ondas eletromagnéticas na translação do sistema solar.
75	– o cálculo da influência das ondas eletromagnéticas na extremidade do disco da via láctea.
75 até 76	– o cálculo da influência das ondas eletromagnéticas na órbita das galáxias no aglomerado da virgem.
76 até 84	– simulações.
84 e 85	– a densidade das ondas eletromagnéticas do sol que chega à Terra.
86 até 91	– anexo I
92 até 99	– anexo II

Introdução

O cálculo da curva de rotação da galáxia fechou com uma boa precisão, a órbita planetária no sistema solar e a órbita de galáxias nos aglomerados (primeiro trabalho de Zwicky) também fecharam, não resta dúvidas, a matéria escura é a massa das ondas eletromagnéticas (luz) emitida pelas estrelas.

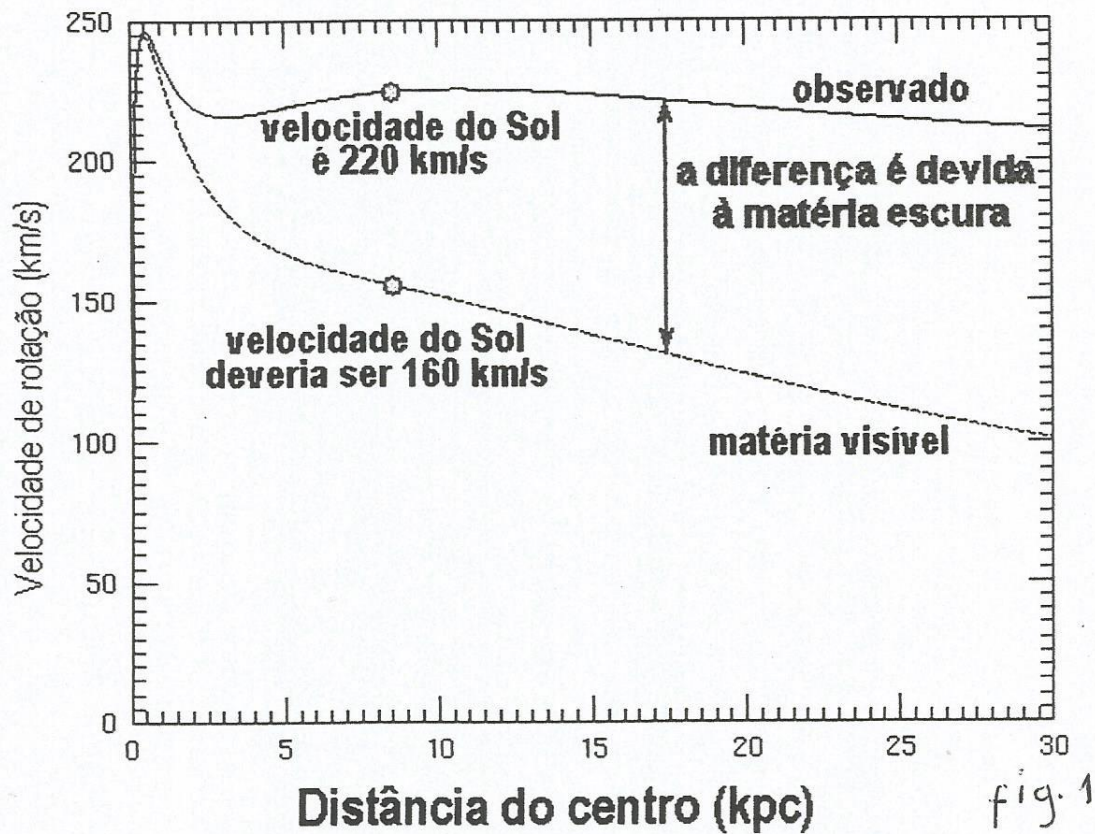
A ciência sempre conceituou que as ondas eletromagnéticas (luz) não é matéria e não tem massa, mas este conceito é superficial, não é sólido. Em 1919 foi observado pela primeira vez as lentes gravitacionais, ou seja, a luz era atraída pela gravidade. A lei da Gravitação Universal é um conceito sólido e indiscutível, e só restava dizer que a luz era matéria e tinha massa, mas a ciência continuou com o conceito superficial de que a luz não é matéria, e apoiou a teoria da relatividade.

A teoria da relatividade tem que ser revista, mas uma questão tem que ser respondida: os cientistas sabem que a velocidade da luz não se soma, mas como isto acontece não se sabe.

Agora com estes cálculos não resta mais dúvidas, as ondas eletromagnéticas (luz) é matéria e tem massa, e é ela que é a matéria escura.

O cálculo da curva de rotação da galáxia

A matéria escura é um dos maiores mistérios da ciência. A primeira evidência desta matéria surgiu no estudo das orbitas das galáxias no Aglomerado da Coma em 1933 feito por Zwicky, chegando a conclusão de que havia 400 vezes mais matéria do que se observava. Posteriormente com o estudo da rotação das estrelas na nossa galáxia, também foi constatado que havia mais matéria do que se observava. Na translação dos planetas no sistema solar, nunca foi detectado a matéria escura, ela é só perceptível em grandes órbitas.



Acima está o gráfico da curva de rotação da galáxia (fig.1), na horizontal está a distância ao centro da galáxia em kiloparsec, um parsec é igual a $3,08568 \cdot 10^{16}$ m. Na vertical está a velocidade em Km/s.

A curva superior é a velocidade observada das estrelas, o limites do disco galáctico está a 15,330 Kpc, mas a curva se estende até 30Kpc, as velocidades após 15,330 Kpc é do gás do disco, obtido através de observações de rádio. A curva de baixo é a velocidade que as estrelas e o gás teriam de ter devido a quantidade de matéria observada, a diferença é devido a matéria escura.

Em 1919 durante um eclipse solar, foi observado pela primeira vez a lente gravitacional, ou seja, a luz era atraída pela gravidade, esse efeito foi visto em Sobral no Ceará e na Ilha de Príncipe, na costa da África.

A ciência sempre conceituou as ondas eletromagnéticas (luz) como não sendo matéria e não tendo massa, mas este é um conceito superficial, já a lei de Gravitação Universal é um conceito sólido e indiscutível, então ao se observar que a luz era atraída pela gravidade, só restava dizer que ela era matéria e tinha massa, mas a ciência continuou com seu conceito superficial, apoiando a teoria da relatividade.

O cálculo que vamos apresentar parte do princípio que as ondas eletromagnéticas é matéria e tem massa, se encaixando na curva de rotação da galáxia. Para transformar energia em matéria, vamos usar a fórmula $E=m.c^2$, esta fórmula foi constatada experimentalmente através da perda de massa em substâncias radioativas, o que é confiável.

Este cálculo é trabalhoso e complexo, nós teremos que calcular a quantidade de energia irradiada pelas estrelas contida no interior de cada órbita. O disco galáctico tem um formato aproximado de um disco, o núcleo tem um formato aproximado de uma esfera. Vamos deduzir uma fórmula para calcular a energia contida no interior de uma órbita irradiada por um disco homogêneo que emite luz, sua potência de emissão vai ser homogênea em watts/m^2 (fig.2). O disco galáctico não é homogêneo, então dividiremos em 11 trechos que são aproximadamente homogêneos, oferecendo assim uma boa aproximação. Da mesma forma faremos com o núcleo, que é aproximadamente uma esfera, então teremos que deduzir uma fórmula para uma esfera homogênea que emite luz, sua potência de emissão será homogênea em watts/m^3 (fig.3). O núcleo também não

é homogêneo, então será dividido em 8 trechos que são aproximadamente homogêneos.

Estamos usando o termo luz, que na verdade refere-se as ondas eletromagnéticas em todas as frequências.

Vamos partir da situação mais simples, a energia irradiada por um ponto no interior de uma órbita, este ponto estará posicionado no centro da órbita.

$$E = P \cdot t \quad t = \frac{D}{V_c} \quad E = \frac{P \cdot D}{V_c}$$

E – energia

P – potência

t – tempo

D – raio da órbita

V_c – velocidade da luz

Vamos fazer um exemplo: a energia e a massa de luz contida na órbita de plutão.

Distância média de plutão ao sol: 5913520000 Km ou $5,91352 \cdot 10^{12}$ m

Potência do sol: $3,84451 \cdot 10^{26}$ w

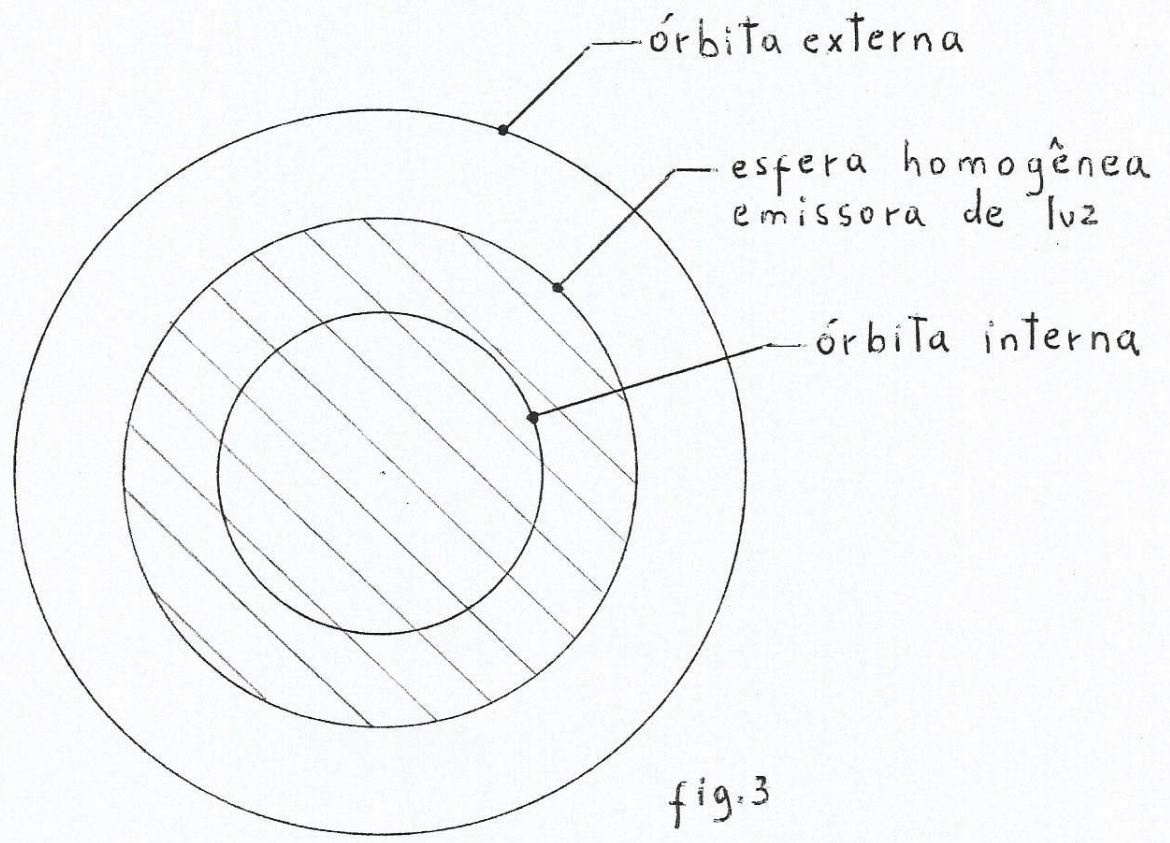
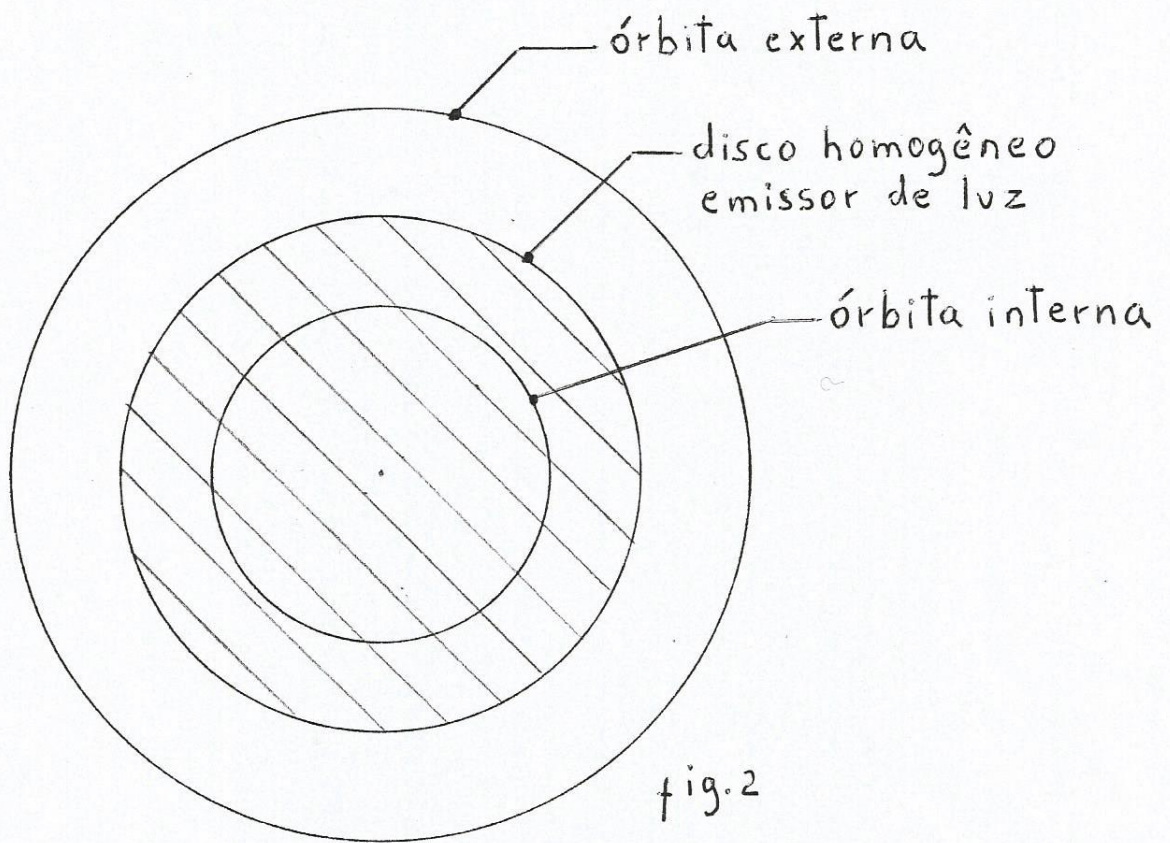
Velocidade da luz: 299792458 m/s

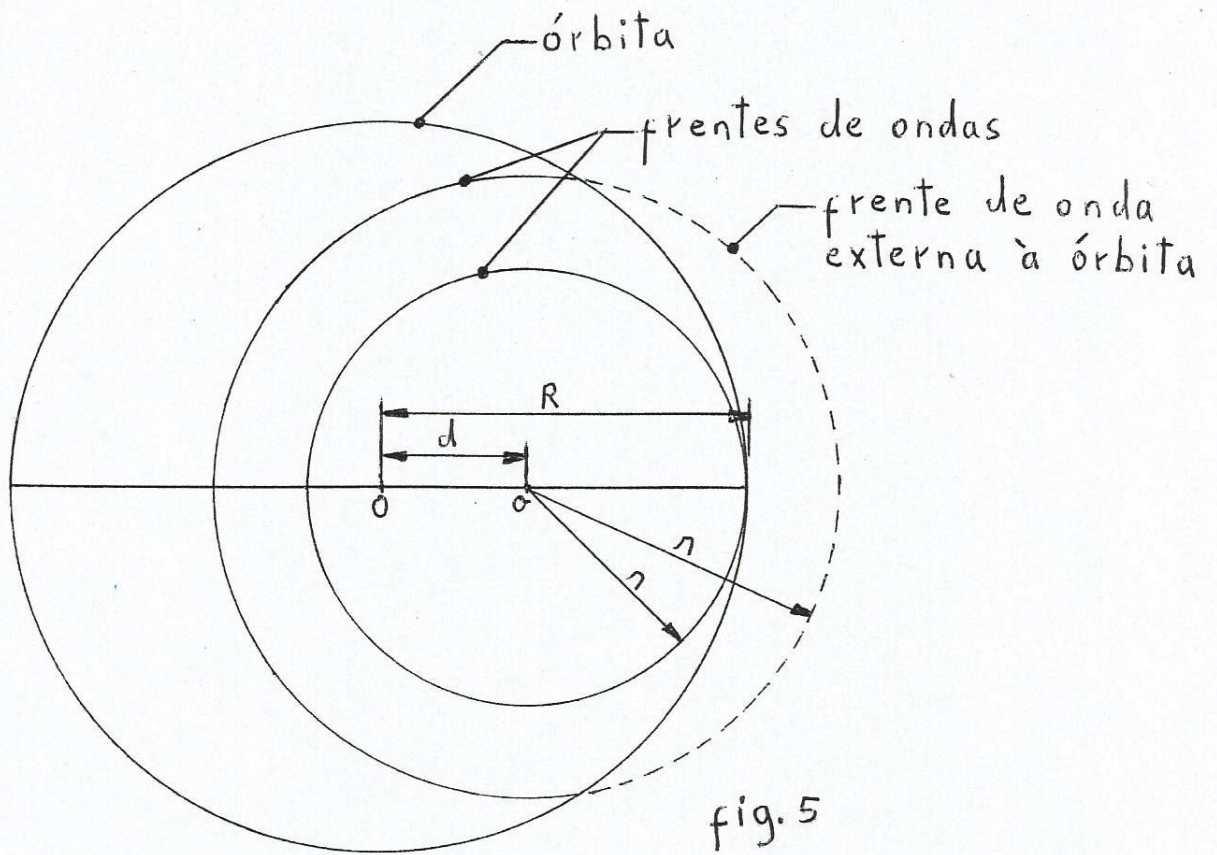
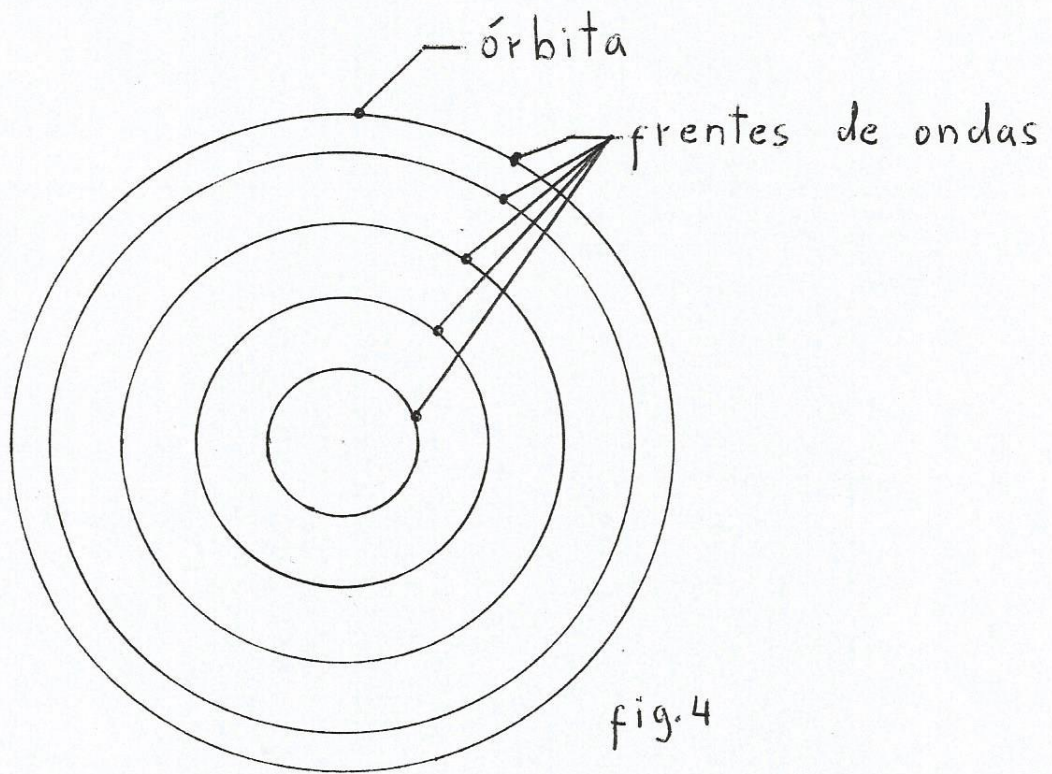
$$E = \frac{P \cdot D}{V_c} \quad E = \frac{3,84451 \cdot 10^{26} \cdot 5,91352 \cdot 10^{12}}{299792458} \quad E = 7,5834418 \cdot 10^{30} \text{ J}$$

$$E = m \cdot V_c^2 \quad m = \frac{E}{V_c^2} \quad m = \frac{7,5834418 \cdot 10^{30}}{299792458^2} \quad m = 8,4377169 \cdot 10^{13} \text{ Kg}$$

Agora o primeiro passo é deduzir a fórmula para calcular a energia contida no interior da órbita (esfera) de um ponto emissor que não está no centro.

Quando o ponto emissor está no centro da órbita, as frentes de ondas são concêntricas a órbita (fig.4), mas quando o ponto emissor não está no centro e o raio da frente de onda é maior que R – d, parte da frente de onda fica fora da órbita (fig.5). Então vamos calcular o valor de n (índice interno), que é a divisão da área da frente de onda interna pela área total (fig.6).





Deduzir fórmula para n:

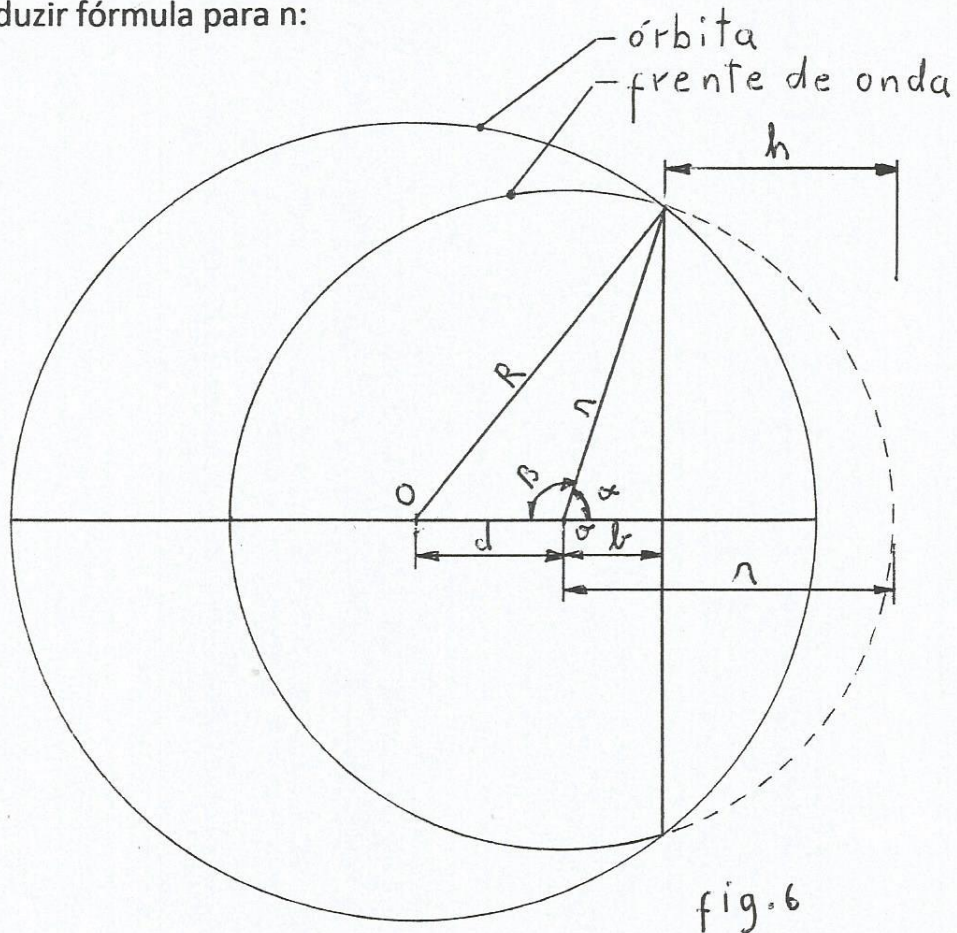


fig. 6

R – raio da órbita

r – raio da frente de onda

d – distância do centro da órbita ao ponto emissor

$$n = \frac{A \text{ esfera} - A \text{ calota externa}}{A \text{ esfera}}$$

$$\text{Área da esfera} - 4\pi r^2$$

$$\text{Área da calota} - 2\pi r h$$

$$R^2 = d^2 + n^2 - 2dn \cos B$$

$$\cos B = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{-2dn}$$

$$\alpha = 180 - B$$

$$\cos B = -\cos \alpha$$

$$-\cos \alpha = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{-2dn}$$

$$\cos \alpha = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{2dn} \quad b = n \cos \alpha \quad b = n \cdot \frac{(R^2 - d^2 - n^2)}{2dn}$$

$$b = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{2d} \quad h = n - b \quad h = n - \frac{(R^2 - d^2 - n^2)}{2d}$$

$$h = \frac{2dn - R^2 + d^2 + n^2}{2d}$$

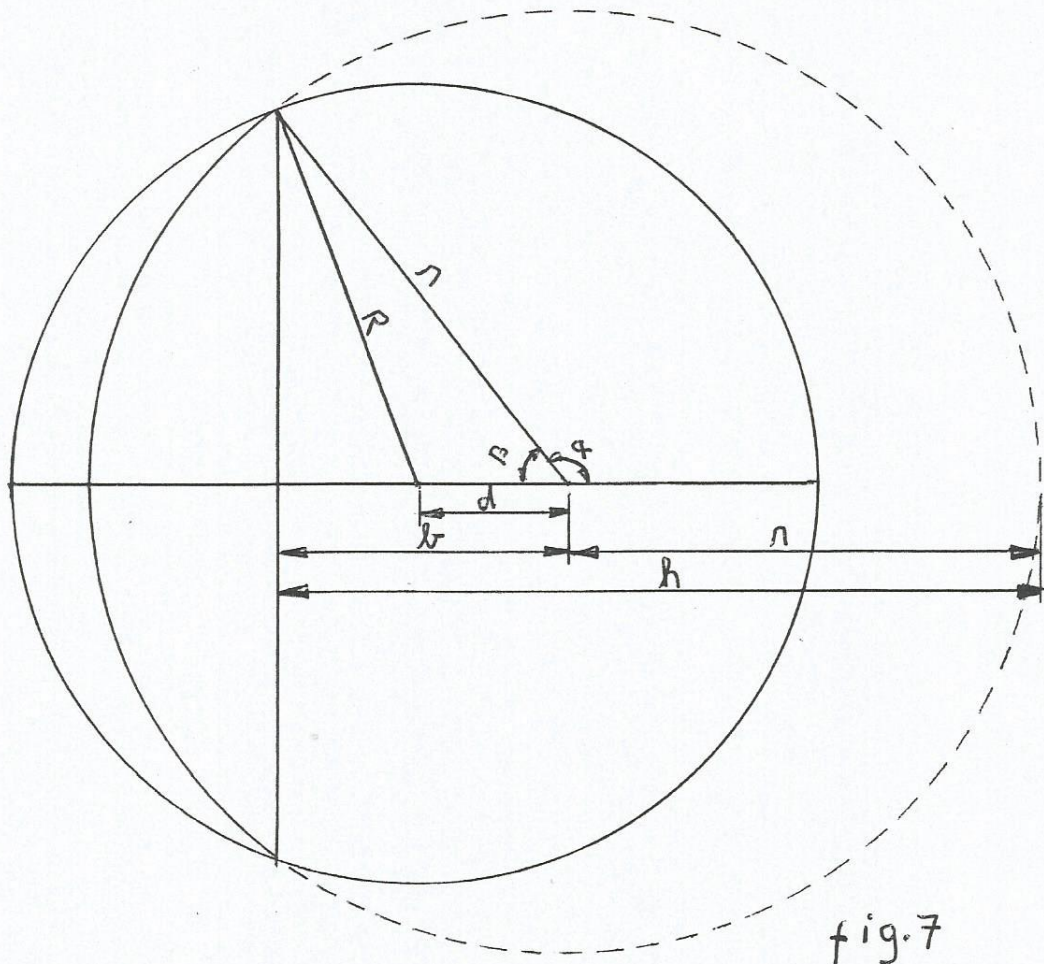
$$n = \frac{A_{\text{ref}} - A_{\text{ref}} \cos \alpha}{A_{\text{ref}}} \quad n = \frac{4\pi n^2 - 2\pi n h}{4\pi n^2}$$

$$n = \frac{2\pi A \cdot (2n - h)}{2\pi A \cdot 2n} \quad n = \frac{2n - h}{2n}$$

$$n = \frac{2n - \frac{(2dn - R^2 + d^2 + n^2)}{2d}}{2n} \quad n = \frac{4nd - 2dn + R^2 - d^2 - n^2}{4nd}$$

$n = \frac{2nd + R^2 - d^2 - n^2}{4nd}$

Vamos verificar a fórmula para quando o α for maior que 90° (fig. 7).



$$R^2 = d^2 + n^2 - 2nd \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{-2nd}$$

$$\cos \beta = \frac{-R^2 + d^2 + n^2}{2nd} \quad b = n \cdot \cos \beta$$

$$b = \frac{n(-R^2 + d^2 + n^2)}{2nd} \quad b = \frac{-R^2 + d^2 + n^2}{2d}$$

$$h = n + b \quad h = n + \frac{-R^2 + d^2 + n^2}{2d}$$

$$h = \frac{2nd - R^2 + d^2 + n^2}{2d} \quad \text{a fórmula de } h \text{ deu a mesma, então está correto}$$

Vamos agora calcular a energia

$$E = P_0 \cdot t \quad t = \frac{\eta}{V_c} \quad E = \frac{P_0 \cdot \eta}{V_c} \quad E = \frac{P_0 \cdot \eta}{V_c}$$

vamos chamar de $K = \frac{P_0}{V_c}$, então $E = K \cdot \eta$

P_0 = potência do ponto emissor

para $0 < \eta \leq R-d$ $K = K_0 = \frac{P_0}{V_c}$

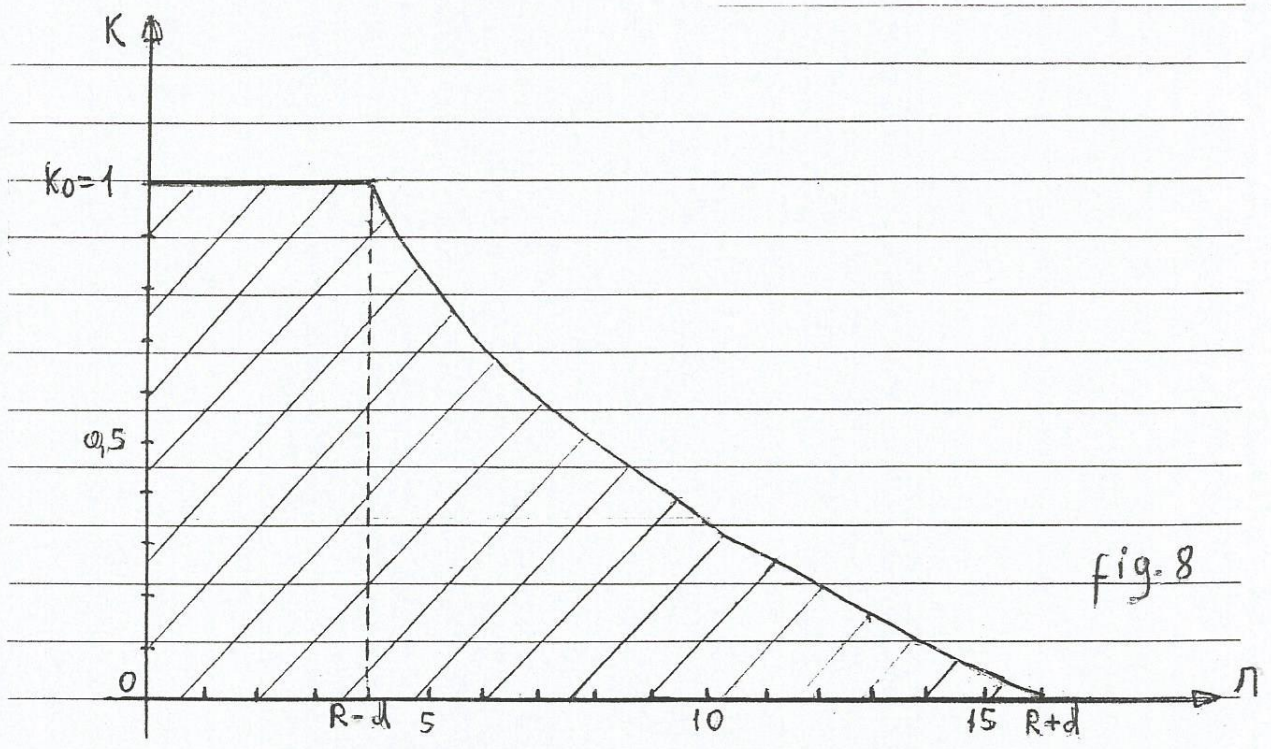
para $R-d < \eta \leq R+d$ $K = \frac{P_0 \cdot \eta}{V_c}$ $K = K_0 \cdot \eta$

$$K = \frac{K_0 (2\eta d + R^2 - d^2 - \eta^2)}{4\eta d}$$

Vamos agora fazer um exemplo numérico

$R=10$ $d=6$ $K_0=1$ $R-d=4$

η	K	$K = 1 \cdot \frac{(2 \cdot \eta \cdot 6 + 10^2 - 6^2 - \eta^2)}{4 \cdot \eta \cdot 6}$
4	1,00000	$4 \cdot \eta \cdot 6$
5	0,82500	
6	0,69444	$K = \frac{12\eta + 100 - 36 - \eta^2}{24\eta}$
7	0,58929	24η
8	0,50000	
9	0,42130	$K = \frac{12\eta + 64 - \eta^2}{24\eta}$
10	0,35000	24η
11	0,28409	
12	0,22222	
13	0,16346	
14	0,10714	
15	0,05278	
16	0,00000	



A energia é $E=K.r$, então se integra o K em função de r entre $R-d$ até $R+d$, e somar com o trecho constante de zero até $R-d$, teremos a área do gráfico que é a energia (fig. 8).

$$K = \frac{k_0 (2nd + R^2 - d^2 - n^2)}{4nd}$$

onde $k_0 = \frac{P_0}{V_c}$

$$K = k_0 \left(\frac{2nd}{4nd} + \frac{R^2}{4nd} - \frac{d^2}{4nd} - \frac{n^2}{4nd} \right)$$

$$E = k_0 \cdot \int \left(0,5n^0 + \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) \frac{1}{n} - \frac{n}{4d} \right) \cdot dn$$

$$E = k_0 \cdot \left(0,5n + \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) \cdot \ln n - \frac{n^2}{8d} \right)$$

integrando de $r=R+d$ - $r=R-d$

$$E = K_0 \left(0,5(R+d) + \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) \cdot \ln(R+d) - \frac{(R+d)^2}{8d} \right)$$

$$- K_0 \left(0,5(R-d) + \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) \cdot \ln(R-d) - \frac{(R-d)^2}{8d} \right)$$

$$E = 0,5K_0R + 0,5K_0d + K_0 \ln(R+d) \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) - \frac{K_0R^2}{8d} - \frac{2K_0Rd}{8d} - \frac{K_0d^2}{8d}$$

$$- 0,5K_0R + 0,5K_0d - K_0 \ln(R-d) \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) + \frac{K_0R^2}{8d} - \frac{2K_0Rd}{8d} + \frac{K_0d^2}{8d}$$

$$E = K_0d + K_0 \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) - \frac{4K_0Rd}{8d}$$

$$E = K_0 \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + K_0d - 0,5K_0R$$

somar $K_0(R-d)$ $K_0R - K_0d$

$E = K_0 \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5K_0R$ <p>fórmula do ponto fora do centro</p>	onde $K_0 = \frac{P_0}{V_c}$
--	------------------------------

Agora vamos testar a integração usando a planilha do excel. Através da fórmula vamos calcular o valor de E para $K_0=1$ $R=50$ $d=30$.

$$E = 1 \left(\frac{50^2 - 30^2}{4 \cdot 30} \right) (\ln(50-30) - \ln(50-30)) + 0,5 \cdot 1 \cdot 50$$

$$E = 43,48392$$

Agora vamos usar a planilha do excel

$$K = \frac{K_0(2nd + R^2 - d^2 - n^2)}{4nd}$$

$$E = \frac{K_0(2nd + R^2 - d^2 - n^2)}{4nd} \cdot dn \quad p/ R-d < n < R+d$$

$$\text{para } 50-30 < n \leq 50+30 \quad 20 < n \leq 80 \quad dn = 0,5$$

Isto corresponde a 120 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral).

$$E = 1 \cdot \frac{(2 \cdot n \cdot 30 + 50^2 - 30^2 - n^2)}{4 \cdot n \cdot 30} \cdot 0,5$$

$$E = \frac{(60n + 1600 - n^2)}{120n} \cdot 0,5 \quad E = \frac{30n + 800 - 0,5n^2}{120n}$$

Os valores de n é o ponto médio de cada trecho.

$$E = n(20,25) + n(20,75) + \dots + n(79,75)$$

$$E = 0,494843107 + 0,484826807 + \dots + 0,001302900$$

$$E = 23,483599332$$

Vamos agora somar com o trecho constante
 $0 < \lambda \leq R-d$ $0 < \lambda \leq 50-30$ $0 < \lambda \leq 20$

$$K = K_0 \quad E = K_0 \cdot \lambda \quad E = 1.20 \quad E = 20$$

$$E_T = 43,48359933$$

O valor está bem semelhante com o da fórmula integrada, então está correto.

Abaixo está a planilha do excel:

λ	E	λ	E	λ	E	λ	E	
20.25	0.494843107	35.25	0.292250296	50.25	0.173294983	65.25	0.080296137	
20.75	0.484826807	35.75	0.287521853	50.75	0.169904557	65.75	0.077435837	
21.25	0.475183824	36.25	0.282866379	51.25	0.166539634	66.25	0.074587264	
21.75	0.465888410	36.75	0.278280896	51.75	0.163199477	66.75	0.071750156	
22.25	0.456917135	37.25	0.273762584	52.25	0.159883373	67.25	0.068924257	
22.75	0.448248626	37.75	0.269308775	52.75	0.156590640	67.75	0.066109317	
23.25	0.439863351	38.25	0.264916939	53.25	0.153320618	68.25	0.063305098	
23.75	0.431743421	38.75	0.260584677	53.75	0.150072674	68.75	0.060511364	
24.25	0.423872423	39.25	0.256309713	54.25	0.146846198	69.25	0.057727888	
24.75	0.416235269	39.75	0.252089885	54.75	0.143640601	69.75	0.054954450	
25.25	0.408818069	40.25	0.247923137	55.25	0.140455317	70.25	0.052190836	
25.75	0.401608010	40.75	0.243807515	55.75	0.137289798	70.75	0.049436837	
26.25	0.394593254	41.25	0.239741162	56.25	0.134143519	71.25	0.046692251	
26.75	0.387762850	41.75	0.235722305	56.75	0.131015969	71.75	0.043956882	
27.25	0.381106651	42.25	0.231749260	57.25	0.127906659	72.25	0.041230536	
27.75	0.374615240	42.75	0.227820419	57.75	0.124815115	72.75	0.038513030	
28.25	0.368279867	43.25	0.223934249	58.25	0.121740880	73.25	0.035804181	
28.75	0.362092391	43.75	0.220089286	58.75	0.118683511	73.75	0.033103814	
29.25	0.356045228	44.25	0.216284134	59.25	0.115642581	74.25	0.030411756	
29.75	0.350131303	44.75	0.212517458	59.75	0.112617678	74.75	0.027727843	
30.25	0.344344008	45.25	0.208787983	60.25	0.109608402	75.25	0.025051910	
30.75	0.338677168	45.75	0.205094490	60.75	0.106614369	75.75	0.022383801	
31.25	0.333125000	46.25	0.201435811	61.25	0.103635204	76.25	0.019723361	
31.75	0.327682087	46.75	0.197810829	61.75	0.100670547	76.75	0.017070440	
32.25	0.322343346	47.25	0.194218474	62.25	0.097720047	77.25	0.014424892	
32.75	0.317104008	47.75	0.190657723	62.75	0.094783367	77.75	0.011786576	
33.25	0.311959586	48.25	0.187127591	63.25	0.091860178	78.25	0.009155351	
33.75	0.306905864	48.75	0.183627137	63.75	0.088950163	78.75	0.006531085	
34.25	0.301938869	49.25	0.180155457	64.25	0.086053016	79.25	0.003913644	
34.75	0.297054856	49.75	0.176711683	64.75	0.083168436	79.75	0.001302900	
							Total	23.483599330

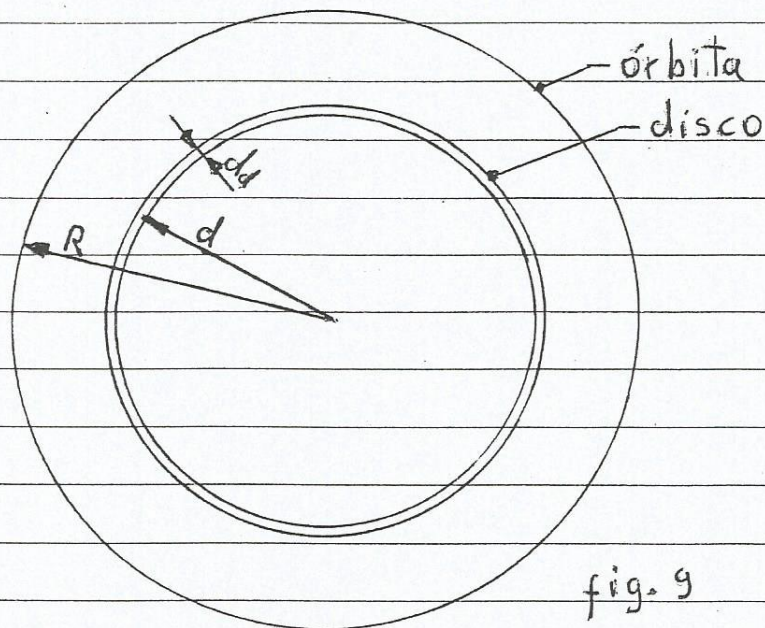
Fórmula do disco

Para deduzir a fórmula do disco, teremos que se basear na fórmula do ponto fora de centro. Vamos considerar um aro de circunferência de espessura muito pequeno (dd), todos os pontos nele vai ter a distância d do centro (fig. 9). Depois integrando o E_0 em função de d , vamos ter o somatório de todos os pequenos aros, ou seja, a energia total do disco. Este disco vai ter uma potência por área constante, então $s=P/A$ s em W/m^2 .

A fórmula do ponto fora de centro:

$$E = K_0 \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5 K_0 R \quad K_0 = \frac{P}{V_c}$$

$$E = \frac{P}{V_c} \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5 R$$



$$P = s \cdot A \quad P = s \cdot 2\pi d \cdot dd$$

$$E_0 = \frac{\rho \cdot 2\pi \cdot d \cdot dd}{V_c} \left(\left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R \right)$$

$$K = \frac{\rho \cdot 2\pi}{V_c}$$

$$E_0 = K \cdot d \cdot \left(\left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R \right) dd$$

$$E_0 = \frac{K}{4} (R^2 - d^2) ((\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5KRd) dd$$

$$E_0 = (0,25KR^2 - 0,25Kd^2) ((\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5KRd) dd$$

$$E_0 = \overset{\textcircled{1}}{0,25KR^2} \overset{\textcircled{2}}{\ln(R+d)} dd - \overset{\textcircled{3}}{0,25Kd^2} \overset{\textcircled{4}}{\ln(R-d)} dd + \overset{\textcircled{5}}{0,5KRd} dd$$

Agora vamos fazer a integração de E_0 em função de d , uma integral muito trabalhosa e difícil, então vamos fazer em pedaços, integrando os 5 termos separadamente.

Termo 1

$$\int_0^d 0,25KR^2 \ln(R+d) dd \quad u=R+d \quad du=dd$$

$$0,25KR^2 \int \ln u du \quad u=R+0 \quad u=R \quad u=R+d$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} R+d \\ | \\ 0,25KR^2(u \ln u + u) \\ | \\ R \end{array} \right\} \\
 & 0,25KR^2((R+d) \ln(R+d) - (R+d)) - 0,25KR^2(R \ln R - R) \\
 & 0,25KR^2(R \ln(R+d) + d \ln(R+d) - R - d) - 0,25KR^3 \ln R \\
 & + 0,25KR^3 \\
 & 0,25KR^3 \ln(R+d) + 0,25KR^2 d \ln(R+d) - \cancel{0,25KR^3} - 0,25KR^2 d \\
 & - 0,25KR^3 \ln R + \cancel{0,25KR^3} \\
 & \underline{0,25KR^3 \ln(R+d) + 0,25KR^2 d \ln(R+d) - 0,25KR^3 \ln R - 0,25KR^2 d}
 \end{aligned}$$

Termo 2

$$\begin{aligned}
 & \int_0^d -0,25KR^2 \ln(R-d) dd \quad u = R-d \quad du = -dd \quad dd = -du \\
 & -0,25KR^2 \int \ln u \cdot -du \quad 0,25KR^2 \int \ln u du \\
 & u = R-d \quad u = R-0 \quad u = R \quad u = R-d
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} R-d \\ | \\ 0,25KR^2(u \ln u - u) \\ | \\ R \end{array} \right\}$$

$$0,25KR^2((R-d)\ln(R-d) - (R-d)) - 0,25KR^2(R\ln R - R)$$

$$0,25KR^2(R-d)\ln(R-d) - 0,25KR^2(R-d) - 0,25KR^3\ln R + 0,25KR^3$$

$$0,25KR^3\ln(R-d) - 0,25KR^2d\ln(R-d) - \cancel{0,25KR^3} + 0,25KR^2d \\ - 0,25KR^3\ln R + \cancel{0,25KR^3}$$

$$\underline{0,25KR^3\ln(R-d) - 0,25KR^2d\ln(R-d) - 0,25KR^3\ln R + 0,25KR^2d}$$

$$\int_0^d -0,25Kd^2\ln(R+d)dd \quad \begin{array}{l} \text{Termo 3} \\ u=R+d \quad du=dd \\ d=u-R \end{array}$$

$$-0,25K \int_0^d (u-R)^2 \ln u du$$

$$-0,25K \int_0^d (u^2 - 2Ru + R^2) \ln u du$$

$$-0,25K \int_0^d (u^2 \ln u - 2Ru \ln u + R^2 \ln u) du$$

fórmula de integral: $\int x^m \ln x dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right)$

$$-0,25K \left(u^3 \left(\frac{\ln u}{3} - \frac{1}{9} \right) - 2Ru^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) + \right.$$

$$R^2 (u \ln u - u)$$

$$-0,25K \left(\frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9} - Ru^2 \ln u + 0,5Ru^2 + R^2u \ln u - R^2u \right)$$

R+d

$$\left| \frac{-0,25K u^3 \ln u}{3} + \frac{0,25K u^3}{9} + 0,25KRu^2 \ln u - 0,125KRu^2 \right.$$

R

$$\left. -0,25KR^2u \ln u + 0,25KR^2u \right)$$

$$u=R+d \quad u=R+0 \quad u=R \quad u=R+d$$

$$- \frac{0,25K (R+d)^3 \ln (R+d)}{3} + \frac{0,25K (R+d)^3}{9}$$

$$+ 0,25KR (R+d)^2 \ln (R+d) - 0,125KR (R+d)^2$$

$$- 0,25KR^2 (R+d) \ln (R+d) + 0,25KR^2 (R+d)$$

$$- \left(\frac{-0,25KR^3 \ln R}{3} + \frac{0,25KR^3}{9} + 0,25KR^2 \ln R \right.$$

$$\left. - 0,125KR^2 - 0,25KR^2 \ln R + 0,25KR^2 \right) \therefore$$

$$- \frac{0,25K (R+d)^3 \ln (R+d)}{3} + \frac{0,25K (R+d)^3}{9}$$

$$+ 0,25KR (R+d)^2 \ln (R+d) - 0,125KR (R+d)^2$$

$$-0,25KR^2(R+d) \ln(R+d) + 0,25KR^2(R+d)$$

$$+ \frac{0,25KR^3 \ln R}{3} - \frac{0,25KR^3}{9} - \cancel{0,25KR^3 \ln R} + 0,125KR^3$$

$$+ \cancel{0,25KR^3 \ln R} - 0,25KR^3 \therefore$$

$$- \frac{0,25K(R+d)^3 \ln(R+d)}{3} + \frac{0,25K(R+d)^3}{9}$$

$$+ 0,25KR(R+d)^2 \ln(R+d) - 0,125KR(R+d)^2$$

$$- 0,25KR^2(R+d) \ln(R+d) + 0,25KR^2(R+d) + \frac{0,25KR^3 \ln R}{3}$$

$$- \frac{2,75KR^3}{18} \therefore$$

Resolvendo os polinômios $(R+d)^3$, $(R+d)^2$ e resolvendo esta longa expressão algébrica, resulta:

$$0,25K \ln(R+d) \left(\frac{-R^3}{3} - \frac{d^3}{3} \right) + 0,25K \left(\frac{R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} + \frac{d^3}{9} \right) + \frac{0,25KR^3 \ln R}{3}$$

Termo 4

$$\int_0^d 0,25K d^2 \ln(R-d) dd \quad \begin{array}{l} u=R-d \quad du=-dd \quad dd=-du \\ -d=u-R \quad d=R-u \end{array}$$

$$0,25k \int_0^d (R-u)^2 \ln u \cdot (-du) - 0,25k \int_0^d (R^2 - 2Ru + u^2) \ln u du$$

$$-0,25k \int_0^d (u^2 \ln u - 2Ru \ln u + R^2 \ln u) du$$

identico ao termo 3

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{0,25K u^3 \ln u}{3} + \frac{0,25K u^3}{9} + 0,25KR u^2 \ln u \\ & -0,125KR u^2 - 0,25KR^2 u \ln u + 0,25KR^2 u \end{aligned} \right|_R^{R-d}$$

$$u=R-d \quad u=R-0 \quad u=R \quad u=R-d$$

$$-\frac{0,25K (R-d)^3 \ln(R-d)}{3} + \frac{0,25K (R-d)^3}{9} + 0,25KR (R-d)^2 \ln(R-d)$$

$$-0,125KR (R-d)^2 - 0,25KR^2 (R-d) \ln(R-d) + 0,25KR^2 (R-d)$$

$$- \left(-\frac{0,25KR^3 \ln R}{3} + \frac{0,25KR^3}{9} + 0,25KR R^2 \ln R \right)$$

$$-0,125KR R^2 - 0,25KR^2 R \ln R + 0,25KR^2 R \quad \therefore$$

$$-\frac{0,25K (R-d)^3 \ln(R-d)}{3} + \frac{0,25K (R-d)^3}{9} + 0,25KR (R-d)^2 \ln(R-d)$$

$$-0,125KR(R-d)^2 - 0,25KR^2(R-d)\ln(R-d) + 0,25KR^2(R-d)$$

$$+ \frac{0,25KR^3\ln R}{3} - \frac{0,25KR^3}{9} - \frac{0,25KR^3\ln R}{9} + 0,125KR^3$$

$$+ \frac{0,25KR^3\ln R}{9} - 0,25KR^3 \therefore$$

$$- \frac{0,25K(R-d)^3\ln(R-d)}{3} + \frac{0,25K(R-d)^3}{9} + 0,25KR(R-d)^2\ln(R-d)$$

$$- 0,125KR(R-d)^2 - 0,25KR^2(R-d)\ln(R-d) + 0,25KR^2(R-d)$$

$$+ \frac{0,25KR^3\ln R}{3} - \frac{275KR^3}{18} \therefore$$

Resolvendo os polinômios $(R-d)^3$, $(R-d)^2$ e resolvendo esta longa expressão algébrica, resulta:

$$0,25K\ln(R-d) \left(\frac{-R^3}{3} + \frac{d^3}{3} \right) + 0,25K \left(\frac{-R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} - \frac{d^3}{9} \right)$$

$$+ \frac{0,25KR^3\ln R}{3}$$

$$\int_0^d 0,5KRd \, dd \quad \text{Termo 5} \quad \frac{0,5KRd^2}{2} \quad \underline{0,25KRd^2}$$

Somando os 5 Termos

$$E = 0,25K \ln(R+d) \left(R^3 + R^2d - \frac{R^3}{3} - \frac{d^3}{3} \right)$$

$$+ 0,25K \ln(R-d) \left(R^3 - R^2d - \frac{R^3}{3} + \frac{d^3}{3} \right)$$

$$+ 0,25K \ln R \left(-R^3 - R^3 + \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} \right)$$

$$+ 0,25K \left(-R^2d + R^2d + \frac{R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} + \frac{d^3}{9} - \frac{R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} - \frac{d^3}{9} + Rd^2 \right)$$

$$E = 0,25K \ln(R+d) \left(\frac{2}{3} R^3 + R^2d - \frac{d^3}{3} \right)$$

$$+ 0,25K \ln(R-d) \left(\frac{2}{3} R^3 - R^2d + \frac{d^3}{3} \right) - \frac{KR^3 \ln R}{3} + \frac{KRd^2}{6}$$

$$\text{para } K = \frac{2\pi\epsilon}{V_c}$$

$$E = \frac{\pi\epsilon}{6V_c} \ln(R+d) \left(2R^3 + 3R^2d - d^3 \right)$$

$$+ \frac{\pi \Delta \ln(R-d) (2R^3 + 3R^2d + d^3)}{6V_c} - \frac{2\pi \Delta R^3 \ln R}{3V_c} + \frac{\pi \Delta R d^2}{3V_c}$$

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} \left[0,5 \ln(R+d) (2R^3 + 3R^2d - d^3) + 0,5 \ln(R-d) (2R^3 - 3R^2d + d^3) - 2R^3 \ln R + R d^2 \right] \text{ fórmula do disco interno } d \leq R$$

Agora vamos testar a integração usando a planilha do excel. Através da fórmula vamos calcular o valor de E para $\frac{\pi \Delta}{3V_c} = 1$
 $R=50$ $d=30$

$$E = 1 \left[0,5 \ln(50+30) (2 \cdot 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 30 - 30^3) + 0,5 \ln(50-30) (2 \cdot 50^3 - 3 \cdot 50^2 \cdot 30 + 30^3) - 2 \cdot 50^3 \ln 50 + 50 \cdot 30^2 \right]$$

$$E = 126457,2539$$

Agora vamos usar a planilha do excel

$$E_0 = \frac{K(R^2 - d^2)}{4} \left(\ln(R+d) - \ln(R-d) \right) + 0,5 K R d$$

$$\text{para } \frac{\pi \Delta}{3V_c} = 1 \quad \frac{\pi \Delta}{V_c} = 3 \quad \Delta 2\pi = 6 \quad K=6$$

$$R=50 \quad d=30 \quad dd=0,2$$

Isto corresponde a 150 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral)

$$E_0 = \frac{6(50^2 - d^2)}{4} (\ln(50+d) - \ln(50-d) + 0,5 \cdot 6 \cdot 50 \cdot d) \cdot 0,2$$

$$E_0 = 0,3(2500 - d^2)(\ln(50+d) - \ln(50-d)) + 30d$$

O valor de d é o ponto médio de cada trecho.

$$E = d(29,9) + d(29,7) + \dots + d(0,1)$$

$$E = 1561,906859 + 1554,819752 + \dots + 5,999992$$

$$E = 126457,4619$$

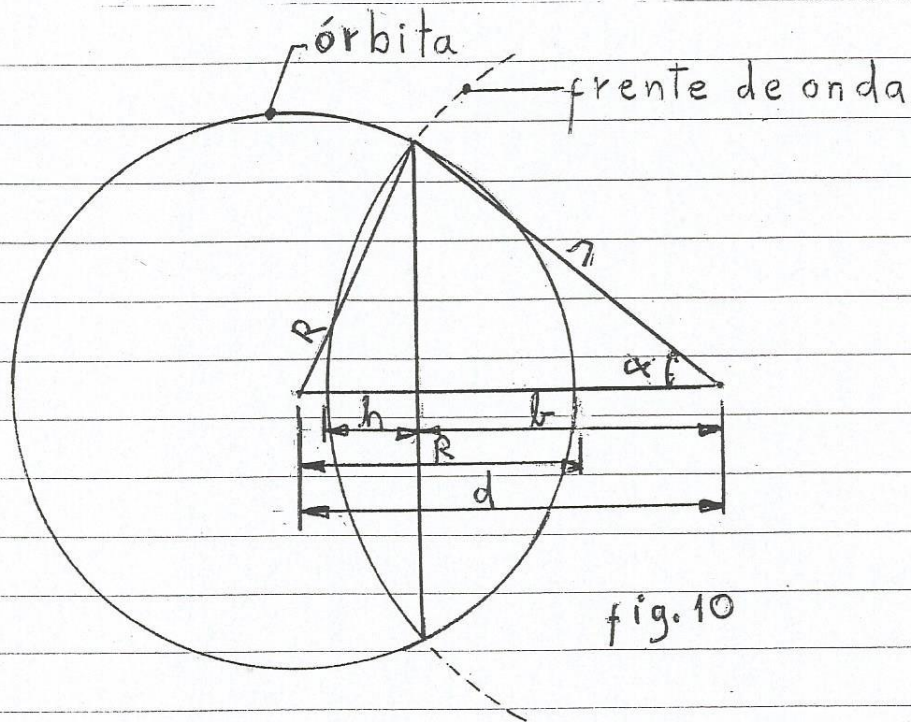
O valor está bem semelhante com o da fórmula integrada, então está correto

Abaixo está a planilha do excel:

d	Eo	d	Eo	d	Eo	d	Eo
29.9	1561.906859	20.7	1168.411882	11.5	677.701266	2.3	137.902623
29.7	1554.819752	20.5	1158.577465	11.3	666.336251	2.1	125.925886
29.5	1547.655764	20.3	1148.698481	11.1	654.948766	1.9	113.945112
29.3	1540.415805	20.1	1138.775484	10.9	643.539236	1.7	101.960687
29.1	1533.100772	19.9	1128.809022	10.7	632.108085	1.5	89.972995
28.9	1525.711548	19.7	1118.799638	10.5	620.655735	1.3	77.982422
28.7	1518.249007	19.5	1108.747874	10.3	609.182608	1.1	65.989351
28.5	1510.714009	19.3	1098.654265	10.1	597.689124	0.9	53.994168
28.3	1503.107401	19.1	1088.519343	9.9	586.175699	0.7	41.997256
28.1	1495.430020	18.9	1078.343637	9.7	574.642752	0.5	29.999000
27.9	1487.682693	18.7	1068.127671	9.5	563.090696	0.3	17.999784
27.7	1479.866235	18.5	1057.871966	9.3	551.519947	0.1	5.999992
27.5	1471.981449	18.3	1047.577040	9.1	539.930916	Total E=126457.461900	

27.3	1464.029131	18.1	1037.243406	8.9	528.324016
27.1	1456.010065	17.9	1026.871574	8.7	516.699656
26.9	1447.925025	17.7	1016.462051	8.5	505.058245
26.7	1439.774777	17.5	1006.015342	8.3	493.400192
26.5	1431.560077	17.3	995.531945	8.1	481.725902
26.3	1423.281671	17.1	985.012359	7.9	470.035781
26.1	1414.940298	16.9	974.457077	7.7	458.330234
25.9	1406.536689	16.7	963.866590	7.5	446.609664
25.7	1398.071563	16.5	953.241386	7.3	434.874474
25.5	1389.545635	16.3	942.581951	7.1	423.125064
25.3	1380.959609	16.1	931.888766	6.9	411.361836
25.1	1372.314184	15.9	921.162311	6.7	399.585188
24.9	1363.610049	15.7	910.403062	6.5	387.795520
24.7	1354.847888	15.5	899.611493	6.3	375.993229
24.5	1346.028375	15.3	888.788076	6.1	364.178712
24.3	1337.152179	15.1	877.933280	5.9	352.352365
24.1	1328.219962	14.9	867.047570	5.7	340.514584
23.9	1319.232378	14.7	856.131410	5.5	328.665762
23.7	1310.190077	14.5	845.185261	5.3	316.806295
23.5	1301.093699	14.3	834.209583	5.1	304.936574
23.3	1291.943881	14.1	823.204833	4.9	293.056993
23.1	1282.741252	13.9	812.171463	4.7	281.167943
22.9	1273.486436	13.7	801.109927	4.5	269.269815
22.7	1264.180051	13.5	790.020675	4.3	257.363000
22.5	1254.822708	13.3	778.904154	4.1	245.447888
22.3	1245.415015	13.1	767.760810	3.9	233.524869
22.1	1235.957572	12.9	756.591086	3.7	221.594331
21.9	1226.450975	12.7	745.395425	3.5	209.656663
21.7	1216.895815	12.5	734.174267	3.3	197.712253
21.5	1207.292677	12.3	722.928048	3.1	185.761488
21.3	1197.642142	12.1	711.657205	2.9	173.804757
21.1	1187.944784	11.9	700.362173	2.7	161.842444
20.9	1178.201176	11.7	689.043383	2.5	149.874937

A fórmula do disco foi desenvolvida para quando a órbita é exterior ao disco, agora devemos verificar a situação em que a órbita é interior ao disco. Vamos deduzir a fórmula para a parte do disco que fica exterior à órbita e depois somaremos com a parte do disco que é igual a órbita. Os passos serão semelhantes ao do disco interno, começaremos calculando a energia no interior da órbita devido a um ponto emissor externo (fig. 10).



$$R^2 = d^2 + n^2 - 2dn \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{R^2 - d^2 - n^2}{-2dn} \quad \cos \alpha = \frac{d^2 + n^2 - R^2}{2dn}$$

$$b = n \cdot \cos \alpha \quad h = n - b \quad h = n - n \cdot \cos \alpha$$

$$h = n - \frac{n(d^2 + n^2 - R^2)}{2d} \quad h = n - \frac{(d^2 + n^2 - R^2)}{2d}$$

$$h = \frac{2dn - d^2 - n^2 + R^2}{2d} \quad n = \frac{\text{Área calota}}{\text{Área esfera}} \quad n = \frac{2\pi n h}{4\pi n^2}$$

$$n = \frac{h}{2n} \quad n = \frac{2dn - d^2 - n^2 + R^2}{2d \cdot 2n} \quad \boxed{n = \frac{2nd + R^2 - d^2 - n^2}{4nd}}$$

Vamos agora calcular a energia

$$E = P \cdot t \quad t = \frac{n}{V_c} \quad E = P_c \cdot \frac{n}{V_c} \quad E = P_c \cdot n$$

vamos chamar de $K = \frac{P}{V_c}$, então $E = K \cdot r$

$P_0 =$ potência do ponto emissor

para $0 < r < d - R$ K será negativo (desconsiderar)

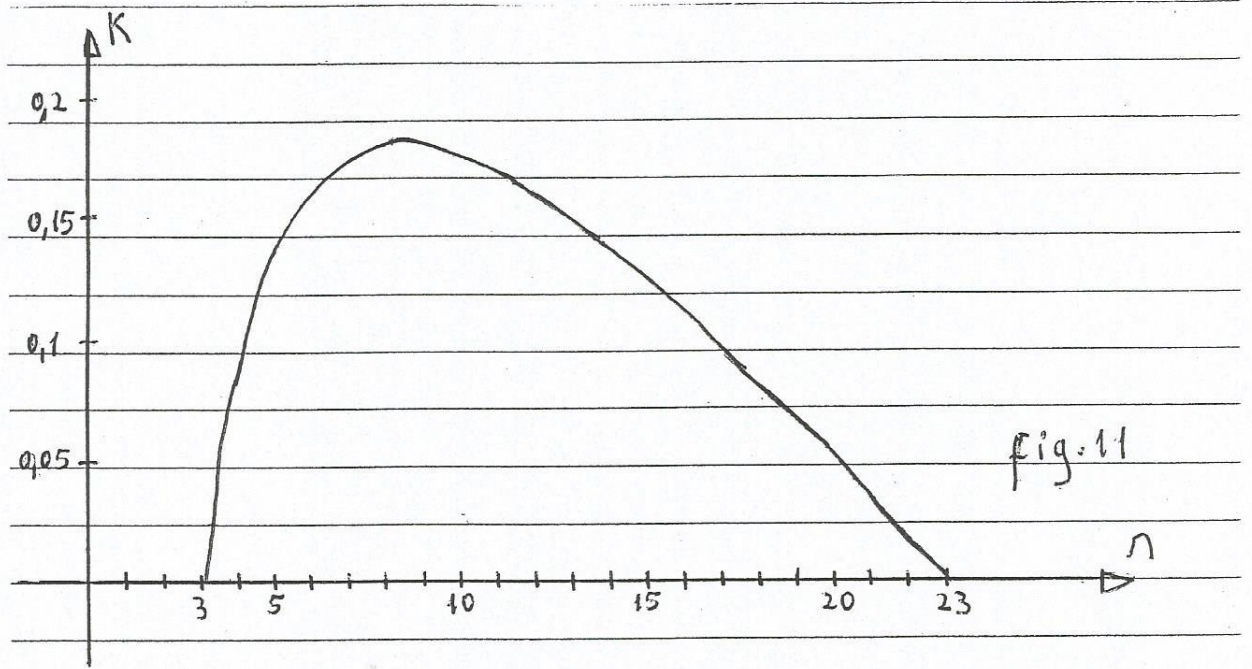
para $d - R \leq r \leq d + R$ K será positivo (considerar)

$$K = \frac{P_0}{V_c} \cdot r \quad K = K_0 \cdot r \quad K = \frac{K_0 (2rd + R^2 - d^2 - r^2)}{4rd}$$

Vamos agora fazer um exemplo numérico
 $R = 10$ $d = 13$ $K_0 = 1$, e um gráfico (fig. 11).

$$K = \frac{1(2 \cdot r \cdot 13 + 10^2 - 13^2 - r^2)}{4 \cdot r \cdot 13} \quad K = \frac{26r - r^2 - 69}{52r}$$

r	K	r	K
0,5	-2,163462	11	0,167832
1	-0,846154	12	0,158654
1,5	-0,413462	13	0,147929
2	-0,201923	14	0,135989
2,5	-0,078846	15	0,123077
3	0	16	0,109375
4	0,091346	17	0,095023
5	0,138462	18	0,080128
6	0,163462	19	0,064777
7	0,175824	20	0,049038
8	0,180288	21	0,032967
9	0,179487	22	0,016608
10	0,175000	23	0



A fórmula de K em função de r ficou idêntica a anterior (do ponto fora do centro), então a integração será a mesma, o intervalo é que será diferente, será de $d - R$ até $d + R$.

$$E = K_0 \left(0,5 r + \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) \cdot \ln r - \frac{r^2}{8d} \right)$$

integrando de $r = d + R$ - $r = d - R$

$$E = K_0 \left(0,5 (d + R) + \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) \cdot \ln (d + R) - \frac{(d + R)^2}{8d} \right)$$

$$- K_0 \left(0,5 (d - R) + \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) \cdot \ln (d - R) - \frac{(d - R)^2}{8d} \right) \therefore$$

$$E = \cancel{0,5 K_0 d} + 0,5 K_0 R + K_0 \ln (d + R) \frac{(R^2 - d^2)}{4d} - \cancel{K_0 d^2} - \frac{2 K_0 d R}{8d}$$

$$-\frac{K_0 R^2}{8d} - 0,5 K_0 d + 0,5 K_0 R - K_0 \ln(d-R) \frac{(R^2-d^2)}{4d} + \frac{K_0 d^2}{8d}$$

$$\frac{-2K_0 d R}{8d} + \frac{K_0 R^2}{8d}$$

$$E = K_0 R + K_0 \frac{(R^2-d^2)}{4d} (\ln(d+R) - \ln(d-R)) - \frac{4K_0 d R}{8d}$$

$$E = K_0 \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + K_0 R - 0,5 K_0 R$$

$$E = K_0 \left(\frac{R^2-d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5 \cdot K_0 \cdot R \quad \text{onde } K_0 = \frac{P}{V_c}$$

fórmula do ponto externo

Agora vamos testar a integração usando a planilha do excel. Através da fórmula vamos calcular o valor de E para $K_0=1$ $R=50$ $d=65$.

$$E = 1 \left(\frac{50^2 - 65^2}{4 \cdot 65} \right) (\ln(65+50) - \ln(65-50)) + 0,5 \cdot 1 \cdot 50$$

$$E = 11,48607183$$

Agora vamos usar a planilha do excel

$$E = K_0 \int_{d-R}^{d+R} \frac{(2rd + R^2 - d^2 - r^2)}{4rd} \cdot dr$$

$$p/ \quad d-R \leq r \leq d+R \quad 15 \leq r \leq 115 \quad dr=1$$

Isto corresponde a 100 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral).

$$E = \frac{1}{4} (2 \cdot n \cdot 65 + 50^2 - 65^2 - n^2) \cdot 1 \quad E = 130n - n^2 - 1725$$

$$4 \cdot n \cdot 65$$

$$260n$$

Os valores de n é o ponto médio de cada trecho.

$$E = n(15,5) + n(16,5) + \dots + n(114,5)$$

$$E = 0,012344913 + 0,034440559 + \dots + 0,001671145$$

$$E = 11,48727861$$

O valor está bem semelhante com o da fórmula integrada, então está correto.

Abaixo está a planilha do excel:

n	E	n	E
15.5	0.012344913	65.5	0.146785085
16.5	0.034440559	66.5	0.144462117
17.5	0.053571429	67.5	0.142094017
18.5	0.070218295	68.5	0.139682762
19.5	0.084763314	69.5	0.137230216
20.5	0.097514071	70.5	0.134738134
21.5	0.108720930	71.5	0.132208176
22.5	0.118589744	72.5	0.129641910
23.5	0.127291326	73.5	0.127040816
24.5	0.134968603	74.5	0.124406298
25.5	0.141742081	75.5	0.121739684
26.5	0.147714078	76.5	0.119042232
27.5	0.152972028	77.5	0.116315136
28.5	0.157591093	78.5	0.113559530
29.5	0.161636245	79.5	0.110776488
30.5	0.165163934	80.5	0.107967033
31.5	0.168223443	81.5	0.105132138
32.5	0.170857988	82.5	0.102272727
33.5	0.173105626	83.5	0.099389682
34.5	0.175000000	84.5	0.096483842
35.5	0.176570964	85.5	0.093556005
36.5	0.177845100	86.5	0.090606936
37.5	0.178846154	87.5	0.087637363

38.5	0.179595405	88.5	0.084647979
39.5	0.180111977	89.5	0.081639450
40.5	0.180413105	90.5	0.078612410
41.5	0.180514365	91.5	0.075567465
42.5	0.180429864	92.5	0.072505198
43.5	0.180172414	93.5	0.069426162
44.5	0.179753673	94.5	0.066330891
45.5	0.179184277	95.5	0.063219895
46.5	0.178473945	96.5	0.060093663
47.5	0.177631579	97.5	0.056952663
48.5	0.176665345	98.5	0.053797345
49.5	0.175582751	99.5	0.050628141
50.5	0.174390708	100.5	0.047445465
51.5	0.173095594	101.5	0.044249716
52.5	0.171703297	102.5	0.041041276
53.5	0.170219267	103.5	0.037820513
54.5	0.168648553	104.5	0.034587781
55.5	0.166995842	105.5	0.031343420
56.5	0.165265487	106.5	0.028087757
57.5	0.163461538	107.5	0.024821109
58.5	0.161587771	108.5	0.021543779
59.5	0.159647705	109.5	0.018256059
60.5	0.157644628	110.5	0.014958232
61.5	0.155581614	111.5	0.011650569
62.5	0.153461538	112.5	0.008333333
63.5	0.151287099	113.5	0.005006777
64.5	0.149060823	114.5	0.001671145

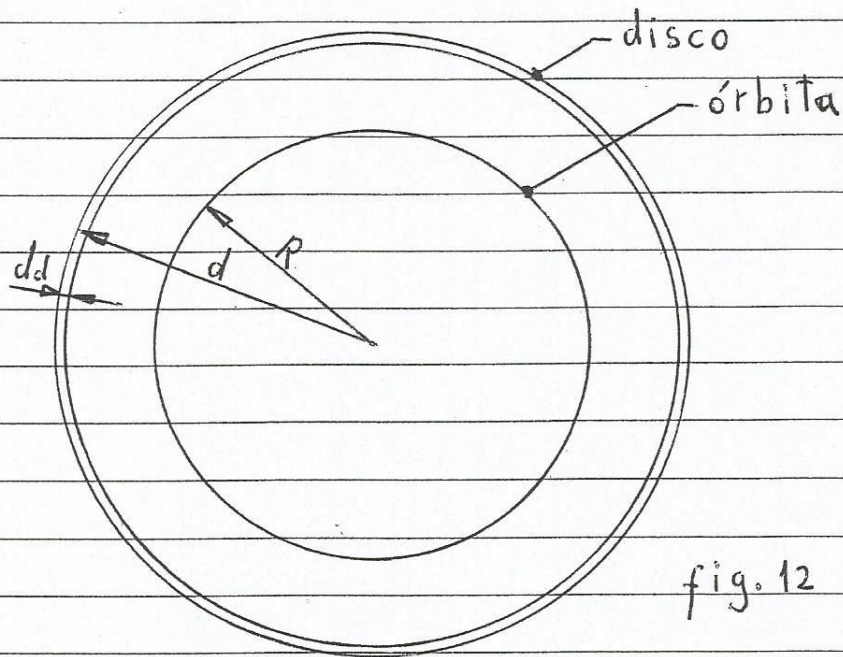
Total: 11.487278610

Agora vamos deduzir a energia que o disco exterior à órbita irradia no interior da órbita, usaremos os mesmos procedimentos anterior (fig. 12).

$$E = K_0 \frac{(R^2 - d^2)}{4d} (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5 K_0 R$$

onde $K_0 = \frac{P}{V_c}$

$$E = \frac{P}{V_c} \left(\frac{(R^2 - d^2)}{4d} (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5 R \right)$$



$$P = \rho \cdot A \quad P = \rho \cdot 2\pi d \cdot dd$$

$$E_0 = \frac{\rho \cdot 2\pi d \cdot dd}{V_c} \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} (\ln(R+d) - \ln(d-R)) + 0,5R \right)$$

$$K = \frac{\rho \cdot 2\pi}{V_c}$$

$$E_0 = K d \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} (\ln(R+d) - \ln(d-R)) + 0,5K \right) dd$$

$$E_0 = \frac{K(R^2 - d^2)}{4} ((\ln(R+d) - \ln(d-R)) + 0,5KRd) dd$$

$$E_0 = (0,25KR^2 - 0,25Kd^2) ((\ln(R+d) - \ln(d-R)) + 0,5KRd) dd$$

$$E_0 = 0,25KR^2 \ln(R+d) dd - 0,25KR^2 \ln(d-R) dd$$

$$- 0,25Kd^2 \ln(R+d) dd + 0,25Kd^2 \ln(d-R) dd + 0,5KRd dd$$

Os termos 1, 3 e 5 são idênticos, a integral será a mesma, o intervalo de integração que será diferente, de R até d.

Termo 1

intervalo R até d integração já feita

$$u = R+d \quad p/d=R \quad u = R+R \quad u = 2R$$

$$u = R+d \quad p/d=d \quad u = R+d$$

$$\int_{2R}^{R+d} 0,25 \cdot K \cdot R^2 (u \ln u - u)$$

$$0,25 K R^2 ((R+d) \ln(R+d) - (R+d)) - 0,25 K R^2 (2R \ln 2R - 2R) \therefore$$

$$0,25 K R^2 (R \ln(R+d) + d \ln(R+d) - R - d) - 0,5 K R^3 \ln 2R + 0,5 K R^3 \therefore$$

$$0,25 K R^3 \ln(R+d) + 0,25 K R^2 d \ln(R+d) - 0,25 K R^3 - 0,25 K R^2 d - 0,5 K R^3 \ln 2R + 0,5 K R^3 \therefore$$

$$0,25 K R^3 \ln(R+d) + 0,25 K R^2 d \ln(R+d) - 0,25 K R^2 d - 0,5 K R^3 \ln 2R + 0,25 K R^3$$

Termo 2

$$\int_R^d -0,25 \cdot K \cdot R^2 \ln(d-R) dd \quad u = d-R \quad du = dd \quad dd = du$$

$$-0,25 \cdot K \cdot R^2 \int_R^d \ln u \cdot du \quad u = d-R \quad p/d=R \quad u = R-R \quad u = 0$$

$$u = d-R \quad p/d=d \quad u = d-R$$

$$\int_0^{d-R} -0,25 \cdot K \cdot R^2 (u \ln u - u)$$

$$-0,25 K R^2 ((d-R) \ln(d-R) - (d-R)) - (-0,25 K R^2 (0 \ln 0 - 0)) \therefore$$

$$-0,25 K R^2 (d \ln(d-R) - R \ln(d-R) - d + R) \therefore$$

$$-0,25 K R^2 d \ln(d-R) + 0,25 K R^3 \ln(d-R) + 0,25 K R^2 d - 0,25 K R^3$$

Termo 3

intervalo R até d integração já feita

$$u=R+d \quad p/ \quad d=R \quad u=R+R \quad u=2R$$

$$u=R+d \quad p/ \quad d=d \quad u=R+d$$

$$\int_{2R}^{R+d} -0,25 K u^3 \ln u + \frac{0,25 K u^3}{9} + 0,25 K R u^2 \ln u - 0,125 K R u^2$$

$$-0,25 K R^2 u \ln u + 0,25 K R^2 u \therefore$$

a parte do (R+d) já foi feita, fazer apenas a parte do (2R)

$$\frac{0,25 K 8 R^3 \ln 2R}{3} - \frac{0,25 K 8 R^3}{9} - 0,25 K R 4 R^2 \ln 2R + 0,125 K R 4 R^2$$

$$+ 0,25 K R^2 2R \ln 2R - 0,25 K R^2 2R \therefore$$

$$\frac{2KR^3 \ln 2R}{3} - \frac{2KR^3}{9} - KR^3 \ln 2R + 0,5KR^3 + 0,5KR^3 \ln 2R - 0,5KR^3 \therefore$$

$$\frac{KR^3 \ln 2R}{6} - \frac{2KR^3}{9} \therefore$$

somando com o termo já feito

$$0,25K \ln(R+d) \left(-\frac{R^3}{3} - \frac{d^3}{3} \right) + 0,25K \left(-\frac{5R^3}{18} + \frac{R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} + \frac{d^3}{9} \right) + \frac{KR^3 \ln 2R}{6}$$

Termo 4

$$\int_R^d 0,25K d^2 \ln(d-R) dd \quad \begin{array}{l} u = d - R \quad du = dd \quad dd = du \\ d = u + R \end{array}$$

$$0,25K \int_R^d (u+R)^2 \ln u \cdot du \therefore 0,25K \int_R^d (u^2 + 2uR + R^2) \ln u \cdot du \therefore$$

$$0,25K \int_R^d (u^2 \ln u + 2uR \ln u + R^2 \ln u) du \therefore$$

$$\text{fórmula de integral } \int x^m \ln x \cdot dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right)$$

$$0,25K \left(u^3 \left(\frac{\ln u}{3} - \frac{1}{9} \right) + 2R u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) + R^2 (u \ln u - u) \right) \therefore$$

$d-R$

$$\int_0^{d-R} \left[\frac{0,25K u^3 \ln u}{3} - \frac{0,25K u^3}{9} + 0,25KR u^2 \ln u - 0,125KR u^2 \right. \\ \left. + 0,25KR^2 u \ln u - 0,25KR^2 u \right] du$$

$$\begin{aligned} u &= d-R & p/ & d=R & u &= R-R & u &= 0 \\ u &= d-R & p/ & d=d & u &= d-R \end{aligned}$$

$$\frac{0,25K(d-R)^3 \ln(d-R)}{3} - \frac{0,25K(d-R)^3}{9} + 0,25KR(d-R)^2 \ln(d-R) \\ - 0,125KR(d-R)^2 + 0,25KR^2(d-R) \ln(d-R) - 0,25KR^2(d-R) \therefore$$

Resolvendo os polinômios $(d-R)^3$, $(d-R)^2$ e resolvendo esta longa expressão algébrica, resulta:

$$0,25K \ln(d-R) \left(\frac{d^3}{3} - \frac{d^2R}{3} + \frac{dR^2}{3} - \frac{R^3}{3} + Rd^2 - 2dR^2 + R^3 + R^2d - R^3 \right) \\ - 0,25K \left(\frac{d^3}{9} - \frac{d^2R}{3} + \frac{dR^2}{3} - \frac{R^3}{9} + \frac{Rd^2}{2} - dR^2 + \frac{R^3}{2} + R^2d - R^3 \right) \\ \underline{0,25K \ln(d-R) \left(\frac{d^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right) - 0,25K \left(\frac{d^3}{9} + \frac{d^2R}{6} + \frac{dR^2}{3} - \frac{11R^3}{18} \right)}$$

Termo 5

$$\int_R^d 0,5KR d \, dd \quad \frac{0,5KR d^2}{2} \quad \int_R^d 0,25KR d^2$$

$$0,25KR d^2 - 0,25KR R^2 \quad \underline{0,25K(Rd^2 - R^3)}$$

Somando os 5 termos

$$0,25K \ln(d+R) \left(\frac{R^3 + R^2d - R^3 - d^3}{3} \right)$$

$$0,25K \ln(d-R) \left(\frac{-R^2d + R^3 + d^3 - R^3}{3} \right)$$

$$+ 0,5K \ln 2R \left(\frac{-R^3 + R^3}{3} \right)$$

$$+ 0,25K \left(\frac{-R^2d + R^3 + R^2d - R^3 - 5R^3}{18} + \frac{R^2d}{3} - \frac{Rd^2}{6} + \frac{d^3 - d^3}{9} - \frac{d^2R}{6} - \frac{dR^2}{3} \right)$$

$$+ \frac{11R^3 + Rd^2 - R^3}{18} \therefore$$

$$0,25K \ln(d+R) \left(\frac{2R^3 + R^2d - d^3}{3} \right) + 0,25K \ln(d-R) \left(\frac{2R^3 - R^2d + d^3}{3} \right)$$

$$- \frac{KR^3}{3} \ln 2R + 0,25K \left(\frac{-2R^3}{3} + \frac{2Rd^2}{3} \right) \therefore$$

$$0,25K \ln(d+R) \left(\frac{2R^3 + 3R^2d - d^3}{3} \right) + 0,25K \ln(d-R) \left(\frac{2R^3 - 3R^2d + d^3}{3} \right)$$

$$- 0,25K \frac{4R^3}{3} \ln 2R + 0,25K \left(\frac{-2R^3 + 2Rd^2}{3} \right) \therefore$$

$$K = \frac{\Delta 2\pi}{V_c} \therefore \frac{0,25K}{3} = \frac{0,25 \Delta 2\pi}{3 V_c} \therefore \frac{0,25K}{3} = \frac{0,5\pi \Delta}{3 V_c}$$

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} \left[0,5 \ln(d+R)(2R^3 + 3R^2d + d^3) + 0,5 \ln(d-R)(2R^3 - 3R^2d + d^3) - 2R^3 \ln 2R - R^3 + Rd^2 \right]$$

fórmula da parte externa do disco.

Agora vamos testar a integração usando a planilha do excel. Através da fórmula vamos calcular o valor de E para $\frac{\pi \Delta}{3V_c} = 1$ $R=50$ $d=65$

$$E = 1 \left[0,5 \ln(65+50)(2 \cdot 50^3 + 3 \cdot 50^2 \cdot 65 - 65^3) + 0,5 \ln(65-50)(2 \cdot 50^3 - 3 \cdot 50^2 \cdot 65 + 65^3) - 2 \cdot 50^3 \ln 2 \cdot 50 - 50^3 + 50 \cdot 65^2 \right]$$

$$E = 83380,86482$$

Agora vamos usar a planilha do excel

$$E_0 = \frac{K(R^2 - d^2)}{4} \left(\ln(R+d) - \ln(d-R) + 0,5KRd \right) dd$$

para $\frac{\pi \Delta}{3V_c} = 1$ $\frac{\pi \Delta}{V_c} = 3$ $\frac{\Delta 2\pi}{V_c} = 6$ $K=6$

$R=50$ $d=65$ $dd=0,1$

Isto corresponde à 150 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral).

$$E_0 = \frac{6(50^2 - d^2)}{4} \left(\ln(50+d) - \ln(d-50) + 0,5 \cdot 6 \cdot 50 \cdot d \right) 0,1$$

$$E_0 = 0,15(2500 - d^2) \left(\ln(50+d) - \ln(d-50) \right) + 15d$$

O valor de d é o ponto médio de cada trecho.

$$E = d(50,05) + d(50,15) + \dots + d(64,95)$$

$$E = 745,0460977 + 737,5945244 + \dots + 448,4434115$$

$$E = 83380,45530$$

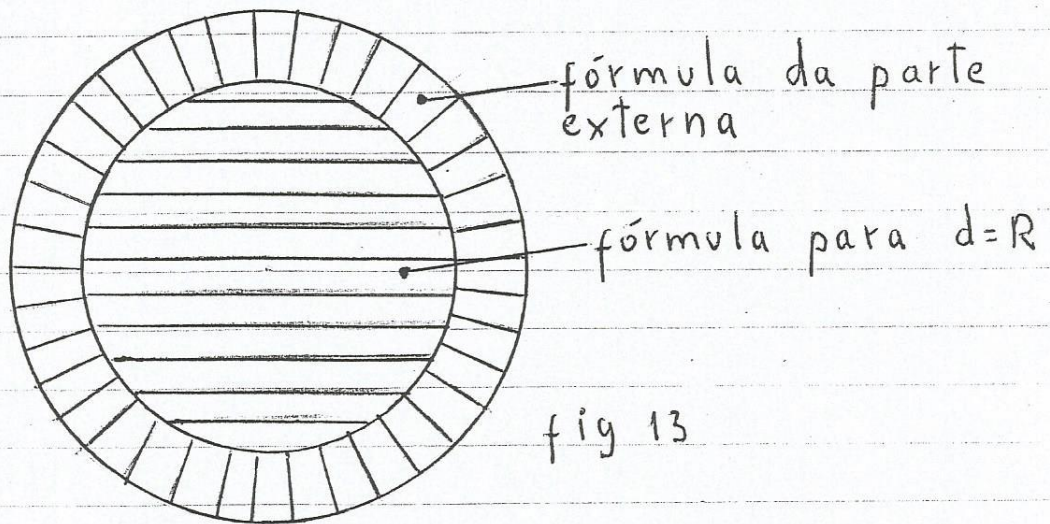
O valor está bem semelhante com o da fórmula integrada, então está correto.

Abaixo está a planilha do excel.

d	Eo	d	Eo	d	Eo	d	Eo
50.05	745.0460977	53.85	610.1452619	57.65	538.1187938	61.45	486.1677893
50.15	737.5945244	53.95	607.8374984	57.75	536.5521829	61.55	484.9765404
50.25	731.2164513	54.05	605.5593459	57.85	534.9984232	61.65	483.7928200
50.35	725.4389728	54.15	603.3099372	57.95	533.4573023	61.75	482.6165386
50.45	720.0805943	54.25	601.0884485	58.05	531.9286139	61.85	481.4476083
50.55	715.0436047	54.35	598.8940962	58.15	530.4121570	61.95	480.2859430
50.65	710.2667232	54.45	596.7261344	58.25	528.9077358	62.05	479.1314580
50.75	705.7078871	54.55	594.5838518	58.35	527.4151598	62.15	477.9840703
50.85	701.3364312	54.65	592.4665699	58.45	525.9342434	62.25	476.8436984
50.95	697.1290107	54.75	590.3736405	58.55	524.4648056	62.35	475.7102622
51.05	693.0672631	54.85	588.3044440	58.65	523.0066701	62.45	474.5836831
51.15	689.1363711	54.95	586.2583873	58.75	521.5596648	62.55	473.4638838
51.25	685.3241293	55.05	584.2349026	58.85	520.1236220	62.65	472.3507886
51.35	681.6203124	55.15	582.2334455	58.95	518.6983781	62.75	471.2443228
51.45	678.0162316	55.25	580.2534936	59.05	517.2837734	62.85	470.1444134
51.55	674.5044146	55.35	578.2945457	59.15	515.8796519	62.95	469.0509882
51.65	671.0783683	55.45	576.3561200	59.25	514.4858615	63.05	467.9639766
51.75	667.7323992	55.55	574.4377533	59.35	513.1022536	63.15	466.8833091
51.85	664.4614758	55.65	572.5389999	59.45	511.7286830	63.25	465.8089173
51.95	661.2611201	55.75	570.6594309	59.55	510.3650077	63.35	464.7407341
52.05	658.1273219	55.85	568.7986329	59.65	509.0110893	63.45	463.6786933
52.15	655.0564699	55.95	566.9562074	59.75	507.6667921	63.55	462.6227301
52.25	652.0452954	56.05	565.1317702	59.85	506.3319837	63.65	461.5727805
52.35	649.0908267	56.15	563.3249503	59.95	505.0065346	63.75	460.5287817
52.45	646.1903501	56.25	561.5353896	60.05	503.6903179	63.85	459.4906719
52.55	643.3413789	56.35	559.7627419	60.15	502.3832098	63.95	458.4583902
52.65	640.5416259	56.45	558.0066728	60.25	501.0850889	64.05	457.4318768
52.75	637.7889807	56.55	556.2668587	60.35	499.7958364	64.15	456.4110728

52.85	635.0814904	56.65	554.5429865	60.45	498.5153362	64.25	455.3959202
52.95	632.4173428	56.75	552.8347532	60.55	497.2434745	64.35	454.3863621
53.05	629.7948517	56.85	551.1418652	60.65	495.9801398	64.45	453.3823422
53.15	627.2124450	56.95	549.4640380	60.75	494.7252230	64.55	452.3838053
53.25	624.6686529	57.05	547.8009959	60.85	493.4786172	64.65	451.3906969
53.35	622.1620990	57.15	546.1524715	60.95	492.2402175	64.75	450.4029636
53.45	619.6914915	57.25	544.5182052	61.05	491.0099214	64.85	449.4205524
53.55	617.2556160	57.35	542.8979454	61.15	489.7876282	64.95	448.4434115
53.65	614.8533286	57.45	541.2914474	61.25	488.5732393	Total E= 83380.4553000	
53.75	612.4835504	57.55	539.6984738	61.35	487.3666579		

Agora vamos somar duas fórmulas para $d=R$ e a parte externa (fig. 13)



para $d=R$

$$E = \frac{\pi \cdot \Delta}{3V_c} \left[0,5 \ln(R+d) (2R^3 + 3R^2d - d^3) + 0,5 \ln(R-d) (2R^3 - 3R^2d + d^3) - 2R^3 \ln R + Rd^2 \right]$$

$$E = \frac{\pi \cdot \Delta}{3V_c} \left[0,5 \ln(R+R) (2R^3 + 3R^2R - R^3) + 0,5 \ln(R-R) (2R^3 - 3R^2R + R^3) - 2R^3 \ln R + RR^2 \right]$$

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} [0,5 \ln 2R (4R^3) + 0,5 \ln(0) \cdot (0) - 2R^3 \ln R + R^3]$$

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} [2R^3 \ln 2R - 2R^3 \ln R + R^3]$$

Somando as duas fórmulas

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} [0,5 \ln(d+R)(2R^3 + 3R^2d - d^3) + 0,5 \ln(d-R)(2R^3 - 3R^2d + d^3) - 2R^3 \ln R + Rd^2]$$

fórmula do disco p/ $d > R$

A fórmula para $d > R$ é praticamente a mesma fórmula para o disco interno ($d \leq R$) diferenciando apenas no item $\ln(R-d)$ e $\ln(d-R)$. Se fizer na fórmula do disco interno $\ln(|R-d|)$, fica uma única fórmula.

$$E = \frac{\pi \Delta}{3V_c} [0,5 \ln(R+d)(2R^3 + 3R^2d - d^3) + 0,5 \ln(|R-d|)(2R^3 - 3R^2d + d^3) - 2R^3 \ln R + Rd^2]$$

fórmula do disco

Fórmula da esfera

A fórmula da esfera será deduzida de maneira semelhante a fórmula do disco. Vamos considerar uma esfera oca de espessura muito pequena (dd), todos os pontos nela vai ter a distância d do centro (fig. 14). Depois integrando E_0 em função de d , vamos ter o somatório de todas as pequenas esferas ocas, ou seja, a energia total da esfera. A esfera vai ter uma potência de volume constante, $S=P/\text{Vol}$ S em W/m^3 .

A fórmula do ponto fora de centro:

$$E = K_0 \frac{(R^2 - d^2)}{4d} (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5 K_0 R \quad K_0 = \frac{P}{V_c}$$

$$E = \frac{P}{V_c} \left(\frac{(R^2 - d^2)}{4d} (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5 R \right)$$

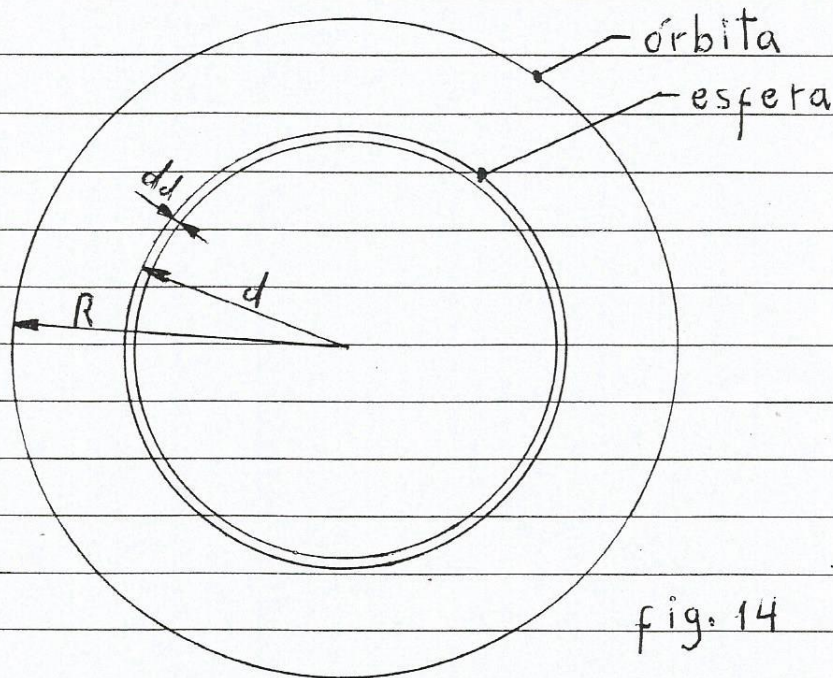


fig. 14

$$P = S \cdot \text{Vol} \quad P = S \cdot 4\pi d^2 \cdot dd$$

$$E_0 = \frac{5 \cdot 4 \pi d^2 \cdot dd}{V_c} \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R \right)$$

$$K = \frac{5 \cdot 4 \pi}{V_c}$$

$$E_0 = K d^2 \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} (\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R \right) dd$$

$$E_0 = K d (R^2 - d^2) \left((\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R K d^2 \right) dd$$

$$E_0 = (0,25 K d R^2 - 0,25 K d^3) \left((\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5R K d^2 \right) dd$$

$$E_0 = \overset{\textcircled{1}}{0,25 K d R^2} \overset{\textcircled{2}}{\ln(R+d)} dd - \overset{\textcircled{2}}{0,25 K d R^2} \overset{\textcircled{2}}{\ln(R-d)} dd$$

$$- \overset{\textcircled{3}}{0,25 K d^3} \overset{\textcircled{4}}{\ln(R+d)} dd + \overset{\textcircled{4}}{0,25 K d^3} \overset{\textcircled{5}}{\ln(R-d)} + \overset{\textcircled{5}}{0,5 R K d^2} dd$$

Agora vamos fazer a integração de E_0 em função de d , uma integral muito trabalhosa e difícil, então vamos fazer em pedaços, integrando os 5 termos separadamente.

Termo 1

$$\int 0,25 K d R^2 \ln(R+d) dd \quad \begin{array}{l} u = R+d \quad du = dd \\ d = u - R \end{array}$$

$$0,25 K R^2 \int d \ln(R+d) dd \therefore 0,25 K R^2 \int (u-R) \ln u du$$

$$0,25 KR^2 \int u \ln u - R \ln u \, du$$

$$0,25 KR^2 \left(u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) - R (u \ln u - u) \right)$$

$$0,25 KR^2 \left(\frac{u^2 \ln u}{2} - \frac{u^2}{4} - R u \ln u + R u \right)$$

R+d

$$\left| 0,125 KR^2 u^2 \ln u - 0,0625 KR^2 u^2 - 0,25 KR^3 u \ln u + 0,25 KR^3 u \right.$$

R

$$\begin{aligned} u=R+d \quad p/d=0 \quad u=R+0 \quad u=R \\ p/d=d \quad u=R+d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0,125 KR^2 (R+d)^2 \ln (R+d) - 0,0625 KR^2 (R+d)^2 \\ &- 0,25 KR^3 (R+d) \ln (R+d) + 0,25 KR^3 (R+d) \\ &- (0,125 K \cdot R^2 \cdot R^2 \ln R - 0,0625 K \cdot R^2 \cdot R^2 - 0,25 KR^3 \cdot R \ln R \\ &+ 0,25 K \cdot R^3 \cdot R) \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(0,125 KR^4 + 0,25 KR^3 d + 0,125 KR^2 d^2) \ln (R+d) - 0,0625 KR^4 \\ &- 0,125 KR^3 d - 0,0625 KR^2 d^2 + (-0,25 KR^4 - 0,25 KR^3 d) \ln (R+d) \\ &+ 0,25 KR^4 + 0,25 KR^3 d - 0,125 KR^4 \ln R + 0,0625 KR^4 + 0,25 KR^4 \ln R \\ &- 0,25 KR^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ln (R+d) (-0,125 KR^4 + 0,125 KR^2 d^2) + 0,125 KR^4 \ln R \\ &+ 0,125 KR^3 d - 0,0625 KR^2 d^2 \end{aligned}$$

Termo 2

$$\int -0,25 K d R^2 \ln(R-d) dd \quad \begin{array}{l} u=R-d \quad du=-dd \quad dd=-du \\ -d=u-R \quad d=R-u \end{array}$$

$$-0,25 K R^2 \int d \ln u \cdot -du \quad \therefore \quad 0,25 K R^2 \int (R-u) \cdot \ln u \cdot du$$

$$0,25 K R^2 \int R \ln u - u \ln u du$$

$$0,25 K R^2 \left(R(u \ln u - u) - u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) \right)$$

$$0,25 K R^2 \left(R u \ln u - R u - \frac{u^2 \ln u}{2} + \frac{u^2}{4} \right)$$

$$\int_R^{R-d} 0,25 K R^3 u \ln u - 0,25 K R^3 u - 0,125 K R^2 u^2 \ln u + 0,0625 K R^2 u^2$$

$$u=R-d \quad p/ \quad d=0 \quad u=R-0 \quad u=R \quad p/ \quad d=d \quad u=R-d$$

$$0,25 K R^3 (R-d) \ln(R-d) - 0,25 K R^3 (R-d) - 0,125 K R^2 (R-d)^2 \ln(R-d) + 0,0625 K R^2 (R-d)^2 - (0,25 K R^3 R \ln R - 0,25 K R^3 R - 0,125 K R^2 R^2 \ln R + 0,0625 K R^2 R^2) \quad \therefore$$

$$0,25 K R^4 \ln(R-d) - 0,25 K R^3 d \ln(R-d) - 0,25 K R^4 + 0,25 K R^3 d - 0,125 K R^4 \ln(R-d) + 0,25 K R^3 d \ln(R-d) - 0,125 K R^2 d^2 \ln(R-d) + 0,0625 K R^4 - 0,125 K R^3 d + 0,0625 K R^2 d^2 - 0,25 K R^4 \ln R + 0,25 K R^4 + 0,125 K R^4 \ln R - 0,0625 K R^4 \quad \therefore$$

$$0,125 K R^4 \ln(R-d) + 0,125 K R^3 d - 0,125 K R^2 d^2 \ln(R-d) + 0,0625 K R^2 d^2 - 0,125 K R^4 \ln R$$

$$\ln(R-d) (0,125KR^4 - 0,125KR^2d^2) - 0,125KR^4 \ln R + 0,125KR^3d + 0,0625KR^2d^2$$

Termo 3

$$\int -0,25Kd^3 \ln(R+d) dd \quad \begin{array}{l} u = R+d \quad du = dd \\ d = u - R \end{array}$$

$$-0,25K \int (u-R)^3 \ln u du$$

$$-0,25K \int (u^3 - 3u^2R + 3uR^2 - R^3) \ln u du$$

$$-0,25K \int (u^3 \ln u - 3u^2R \ln u + 3uR^2 \ln u - R^3 \ln u) du$$

$$-0,25K \left(u^4 \left(\frac{\ln u}{4} - \frac{1}{16} \right) - 3R u^3 \left(\frac{\ln u}{3} - \frac{1}{9} \right) + 3R^2 u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) \right.$$

$$\left. - R^3 (u \ln u - u) \right) \cdot$$

$$-0,25K \left[\begin{array}{l} R+d \\ R \end{array} \right] 0,25u^4 \ln u - 0,0625u^4 - R u^3 \ln u + \frac{R u^3}{3} + 1,5R^2 u^2 \ln u$$

$$- 0,75R^2 u^2 - R^3 u \ln u + R^3 u$$

$$u = R+d \quad p/ \quad d=0 \quad u=R+0 \quad u=R \quad p/ \quad d=d \quad u=R+d$$

$$-0,25K \left(0,25(R+d)^4 \ln(R+d) - 0,0625(R+d)^4 - R(R+d)^3 \ln(R+d) + \frac{R(R+d)^3}{3} + 1,5R^2(R+d)^2 \ln(R+d) - 0,75R^2(R+d)^2 - R^3(R+d) \ln(R+d) \right)$$

$$+ R^3(R+d) - \left(0,25R^4 \ln R - 0,0625R^4 - R^3 \ln R + \frac{RR^3}{3} + 1,5R^2R^2 \ln R - 0,75R^2R^2 - R^3R \ln R + R^3R \right) \therefore$$

$$\begin{aligned} & -0,25K(0,25R^4 \ln(R+d) + R^3d \ln(R+d) + 1,5R^2d^2 \ln(R+d) + Rd^3 \ln(R+d) \\ & + 0,25d^4 \ln(R+d) - 0,0625R^4 - 0,25R^3d - 0,375R^2d^2 - 0,25Rd^3 \\ & - 0,0625d^4 - R^4 \ln(R+d) - 3R^3d \ln(R+d) - 3R^2d^2 \ln(R+d) - Rd^3 \ln(R+d) \\ & + \frac{R^4}{3} + R^3d + R^2d^2 + \frac{Rd^3}{3} + 1,5R^4 \ln(R+d) + 3R^3d \ln(R+d) \\ & + 1,5R^2d^2 \ln(R+d) - 0,75R^4 - 1,5R^3d - 0,75R^2d^2 - R^4 \ln(R+d) \\ & - R^3d \ln(R+d) + R^4 + R^3d - 0,25R^4 \ln R + 0,0625R^4 + R^4 \ln R \\ & - \frac{R^4}{3} - 1,5R^4 \ln R + 0,75R^4 + R^4 \ln R - R^4) \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0,25K(-0,25R^4 \ln(R+d) + 0,25d^4 \ln(R+d) + 0,25R^3d \\ & - 0,125R^2d^2 + \frac{Rd^3}{12} - 0,0625d^4 + 0,25R^4 \ln R) \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0,25K(\ln(R+d)(-0,25R^4 + 0,25d^4) + 0,25R^4 \ln R + 0,25R^3d \\ & - 0,125R^2d^2 + \frac{Rd^3}{12} - 0,0625d^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ln(R+d)(0,0625KR^4 - 0,0625Kd^4) - 0,0625KR^4 \ln R \\ & - 0,0625KR^3d + 0,03125KR^2d^2 - \frac{KRd^3}{48} + \frac{Kd^4}{64} \end{aligned}$$

Termo 4

$$\int 0,25 K d^3 \ln(R-d) dd \quad \begin{array}{l} u=R-d \quad du=-dd \quad dd=-du \\ -d=u-R \quad d=R-u \end{array}$$

$$0,25 K \int (R-u)^3 \ln u \cdot -du$$

$$-0,25 K \int (R^3 - 3R^2u + 3Ru^2 - u^3) \ln u du$$

$$-0,25 K \int (R^3 \ln u - 3R^2u \ln u + 3Ru^2 \ln u - u^3 \ln u) du$$

$$0,25 K \int (u^3 \ln u - 3u^2 R \ln u + 3u R^2 \ln u - R^3 \ln u) du$$

$$0,25 K \left(u^4 \left(\frac{\ln u}{4} - \frac{1}{16} \right) - 3R u^3 \left(\frac{\ln u}{3} - \frac{1}{9} \right) + 3R^2 u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) - R^3 (u \ln u - u) \right)$$

$$0,25 K \left| \begin{array}{l} R-d \\ R \end{array} \right. \left(0,25 u^4 \ln u - 0,0625 u^4 - R u^3 \ln u + \frac{R u^3}{3} + 1,5 R^2 u^2 \ln u - 0,75 R^2 u^2 - R^3 u \ln u + R^3 u \right)$$

$$u=R-d \quad p/d=0 \quad u=R \quad p/d=d \quad u=R-d$$

$$\begin{aligned} & 0,25 K \left(0,25 (R-d)^4 \ln(R-d) - 0,0625 (R-d)^4 - R (R-d)^3 \ln(R-d) \right. \\ & \left. \frac{R (R-d)^3}{3} + 1,5 R^2 (R-d)^2 \ln(R-d) - 0,75 R^2 (R-d)^2 - R^3 (R-d) \ln(R-d) \right. \\ & \left. + R^3 (R-d) - \left(0,25 R^4 \ln R - 0,0625 R^4 - R R^3 \ln R + \frac{R R^3}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. + 1,5 R^2 R^2 \ln R - 0,75 R^2 R^2 - R^3 R \ln R + R^3 R \right) \right) \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,25K(0,25R^4 \ln(R-d) - R^3d \ln(R-d) + 1,5R^2d^2 \ln(R-d) \\
& - Rd^3 \ln(R-d) + 0,25d^4 \ln(R-d) - 0,0625R^4 + 0,25R^3d \\
& - 0,375R^2d^2 + 0,25Rd^3 - 0,0625d^4 - R^4 \ln(R-d) + 3R^3d \ln(R-d) \\
& - 3R^2d^2 \ln(R-d) + Rd^3 \ln(R-d) + \frac{R^4}{3} - R^3d + R^2d^2 - \frac{Rd^3}{3} \\
& + 1,5R^4 \ln(R-d) - 3R^3d \ln(R-d) + 1,5R^2d^2 \ln(R-d) - 0,75R^4 \\
& + 1,5R^3d - 0,75R^2d^2 - R^4 \ln(R-d) + R^3d \ln(R-d) + R^4 \\
& - R^3d - 0,25R^4 \ln R + 0,0625R^4 + R^4 \ln R - \frac{R^4}{3} - 1,5R^4 \ln R \\
& + 0,75R^4 + R^4 \ln R - R^4) \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,25K(-0,25R^4 \ln(R-d) + 0,25d^4 \ln(R-d) - 0,25R^3d \\
& - 0,125R^2d^2 - \frac{Rd^3}{12} - 0,0625d^4 + 0,25R^4 \ln R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ln(R-d)(-0,0625KR^4 + 0,0625Kd^4) + 0,0625KR^4 \ln R \\
& - 0,0625KR^3d - 0,03125KR^2d^2 - \frac{KRd^3}{48} - \frac{Kd^4}{64}
\end{aligned}$$

Termo 5

$$\int 0,5KRd^2 dd$$

$$0,5KR \int d^2 dd \quad \therefore \quad \underline{\underline{\frac{0,5KRd^3}{3}}}$$

Somando os 5 Termos

$$\begin{aligned} & \ln(R+d) (-0,0625KR^4 + 0,125KR^2d^2 - 0,0625Kd^4) \\ & + \ln(R-d) (0,0625KR^4 - 0,125KR^2d^2 + 0,0625Kd^4) \\ & + 0,125KR^3d + 0,125KRd^3 \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = 0,125K & \left[\ln(R+d) (-0,5R^4 + R^2d^2 - 0,5d^4) \right. \\ & \left. + \ln(R-d) (0,5R^4 - R^2d^2 + 0,5d^4) + R^3d + Rd^3 \right] \therefore \end{aligned}$$

$$K = \frac{5,4\pi}{V_c}$$

$$\begin{aligned} E = \frac{\pi S}{2V_c} & \left[0,5 \ln(R+d) (-R^4 + 2R^2d^2 - d^4) \right. \\ & \left. + 0,5 \ln(R-d) (R^4 - 2R^2d^2 + d^4) + R^3d + Rd^3 \right] \\ & \text{f\u00f3rmula da esfera interna } d \leq R \end{aligned}$$

Agora vamos testar a integra\u00e7\u00e3o usando a planilha do excel. Atrav\u00e9s da f\u00f3rmula vamos calcular o valor de E para $\frac{\pi S}{2V_c} = 1$ $R=50$ $d=30$

$$\begin{aligned} E &= 1 \left[0,5 \ln(50+30) (-50^4 + 2 \cdot 50^2 \cdot 30^2 - 30^4) \right. \\ & \left. + 0,5 \ln(50-30) (50^4 - 2 \cdot 50^2 \cdot 30^2 + 30^4) + 50^3 \cdot 30 + 50 \cdot 30^3 \right] \\ E &= 3325543,218 \end{aligned}$$

Agora vamos usar a planilha do excel.

$$E_0 = \frac{Kd(R^2 - d^2)((\ln(R+d) - \ln(R-d)) + 0,5RKd^2)}{4} dd$$

para $\frac{\pi S}{2V_c} = 1$ $\frac{\pi S}{V_c} = 2$ $\frac{54\pi}{V_c} = 8$ $K=8$

$R=50$ $d=30$ $dd=0,2$

Isto corresponde à 150 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral).

$$E_0 = \frac{8 \cdot d(50^2 - d^2)((\ln(50+d) - \ln(50-d)) + 0,5 \cdot 50 \cdot 8 \cdot d^2)}{4} \cdot 0,2$$

$$E_0 = 0,4d(2500 - d^2)(\ln(50+d) - \ln(50-d)) + 40d^2$$

O valor de d é o ponto médio de cada trecho

$$E = d(29,9) + d(29,7) + \dots + d(0,1)$$

$$E = 62268,02010 + 61570,86219 + \dots + 0,8$$

$$E = 3325514,142$$

O valor está bem semelhante com o da fórmula integrada, então está correto.

Abaixo está a planilha do excel:

d	Eo	d	Eo	d	Eo	d	Eo
29.9	62268.02010	22.3	37030.33978	14.7	16780.17563	7.1	4005.58394
29.7	61570.86219	22.1	36419.54979	14.5	16340.24839	6.9	3784.52889
29.5	60874.46006	21.9	35812.36848	14.3	15905.59606	6.7	3569.62768
29.3	60178.91078	21.7	35208.85226	14.1	15476.25085	6.5	3360.89451
29.1	59484.30994	21.5	34609.05675	13.9	15052.24445	6.3	3158.34312
28.9	58790.75166	21.3	34013.03683	13.7	14633.60801	6.1	2961.98686
28.7	58098.32868	21.1	33420.84660	13.5	14220.37215	5.9	2771.83860

28.5	57407.13233	20.9	32832.53943	13.3	13812.56700	5.7	2587.91084
28.3	56717.25259	20.7	32248.16794	13.1	13410.22214	5.5	2410.21559
28.1	56028.77810	20.5	31667.78404	12.9	13013.36669	5.3	2238.76448
27.9	55341.79619	20.3	31091.43890	12.7	12622.02920	5.1	2073.56870
27.7	54656.39294	20.1	30519.18298	12.5	12236.23778	4.9	1914.63902
27.5	53972.65314	19.9	29951.06604	12.3	11856.01999	4.7	1761.98577
27.3	53290.66038	19.7	29387.13717	12.1	11481.40291	4.5	1615.61889
27.1	52610.49701	19.5	28827.44472	11.9	11112.41314	4.3	1475.54787
26.9	51932.24424	19.3	28272.03641	11.7	10749.07677	4.1	1341.78179
26.7	51255.98206	19.1	27720.95926	11.5	10391.41941	3.9	1214.32932
26.5	50581.78938	18.9	27174.25964	11.3	10039.46619	3.7	1093.19870
26.3	49909.74393	18.7	26631.98326	11.1	9693.24174	3.5	978.39776
26.1	49239.92238	18.5	26094.17516	10.9	9352.77023	3.3	869.93391
25.9	48572.40031	18.3	25560.87977	10.7	9018.07534	3.1	767.81415
25.7	47907.25222	18.1	25032.14085	10.5	8689.18029	2.9	672.04506
25.5	47244.55157	17.9	24508.00156	10.3	8366.10782	2.7	582.63280
25.3	46584.37081	17.7	23988.50441	10.1	8048.88020	2.5	499.58312
25.1	45926.78135	17.5	23473.69130	9.9	7737.51923	2.3	422.90138
24.9	45271.85363	17.3	22963.60353	9.7	7432.04625	2.1	352.59248
24.7	44619.65710	17.1	22458.28178	9.5	7132.48215	1.9	288.66095
24.5	43970.26024	16.9	21957.76613	9.3	6838.84734	1.7	231.11089
24.3	43323.73059	16.7	21462.09607	9.1	6551.16178	1.5	179.94599
24.1	42680.13477	16.5	20971.31050	8.9	6269.44499	1.3	135.16953
23.9	42039.53845	16.3	20485.44773	8.7	5993.71601	1.1	96.78438
23.7	41402.00642	16.1	20004.54551	8.5	5723.99345	0.9	64.79300
23.5	40767.60257	15.9	19528.64098	8.3	5460.29546	0.7	39.19744
23.3	40136.38990	15.7	19057.77076	8.1	5202.63974	0.5	19.99933
23.1	39508.43056	15.5	18591.97086	7.9	4951.04356	0.3	7.19991
22.9	38883.78585	15.3	18131.27676	7.7	4705.52374	0.1	0.80000
22.7	38262.51620	15.1	17675.72336	7.5	4466.09664	Total E=	3325514.14200
22.5	37644.68125	14.9	17225.34505	7.3	4232.77821		

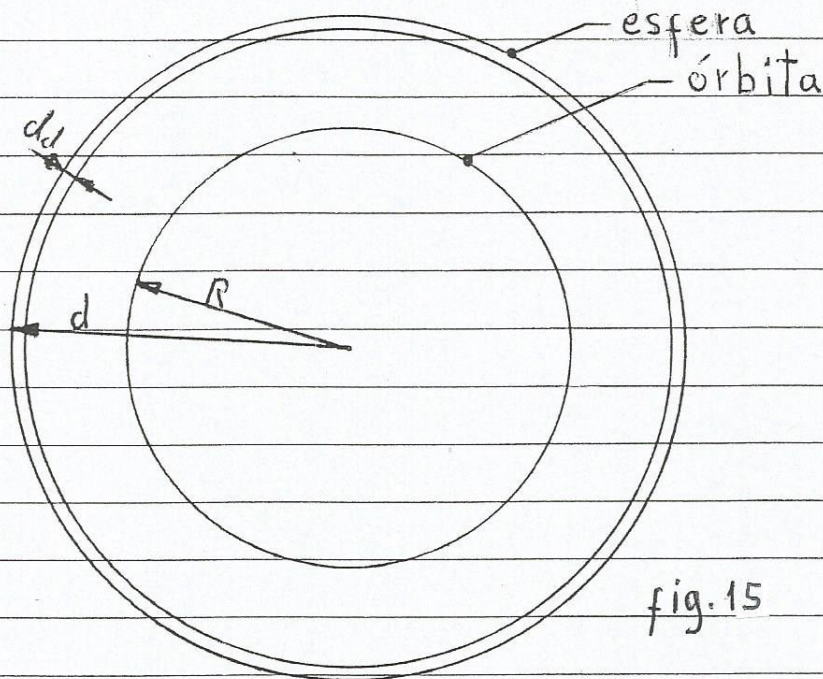
Da mesma forma que ocorreu com o disco, faremos com a esfera, devemos verificar a situação em que a órbita é interior a esfera. Vamos deduzir a fórmula para a parte da esfera que fica exterior à órbita e depois somaremos com a parte da esfera que é igual à órbita. Os passos serão semelhantes ao da esfera interna (fig. 15).

Abaixo está a fórmula do ponto externo:

$$E = K_0 \left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5 K_0 R$$

onde $K_0 = \frac{P}{V_c}$

$$E = \frac{P}{V_c} \left(\left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5R \right)$$



$$P = S \cdot V_0 \quad P = S \cdot 4\pi d^2 \cdot dd$$

$$E_0 = \frac{S \cdot 4\pi d^2 \cdot dd}{V_c} \left(\left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5R \right)$$

$$K = \frac{S \cdot 4\pi}{V_c}$$

$$E_0 = K d^2 \left(\left(\frac{R^2 - d^2}{4d} \right) (\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5R \right) dd$$

$$E_0 = \frac{Kd(R^2 - d^2)}{4} ((\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5RKd^2) dd$$

$$E_0 = (0,25KdR^2 - 0,25Kd^3) ((\ln(d+R) - \ln(d-R)) + 0,5RKd^2) dd$$

$$E_0 = \overset{\textcircled{1}}{0,25KdR^2} \overset{\textcircled{2}}{\ln(d+R)} dd - \overset{\textcircled{2}}{0,25KdR^2} \overset{\textcircled{4}}{\ln(d-R)} dd$$

$$- \overset{\textcircled{3}}{0,25Kd^3} \overset{\textcircled{3}}{\ln(d+R)} dd + \overset{\textcircled{4}}{0,25Kd^3} \overset{\textcircled{4}}{\ln(d-R)} dd + \overset{\textcircled{5}}{0,5RKd^2} dd$$

Os termos 1, 3 e 5 são idênticos, a integral será a mesma, o intervalo de integração que será diferente, de R até d.

Termo 1

intervalo R até d integração já feita

$$\int_{2R}^{R+d} 0,125KR^2 u^2 \ln u - 0,0625KR^2 u^2 - 0,25KR^3 u \ln u + 0,25KR^3 u$$

$$u=R+d \quad p/d=R \quad u=R+R \quad u=2R$$

$$p/d=d \quad u=R+d$$

$$0,125KR^2(R+d)^2 \ln(R+d) - 0,0625KR^2(R+d)^2 - 0,25KR^3(R+d) \ln(R+d) + 0,25KR^3(R+d) - (0,125KR^2 4R^2 \ln 2R - 0,0625KR^2 4R^2 - 0,25KR^3 2R \ln 2R + 0,25KR^3 2R) \therefore$$

$$(0,125KR^4 + 0,25KR^3d + 0,125KR^2d^2) \ln(R+d) - 0,0625KR^4 - 0,125KR^3d - 0,0625KR^2d^2 + (-0,25KR^4 - 0,25KR^3d) \ln(R+d) + 0,25KR^4 + 0,25KR^3d - 0,5KR^4 \ln 2R + 0,25KR^4 + 0,5KR^4 \ln 2R - 0,5KR^4 \therefore$$

$$\ln(R+d)(-0,125KR^4+0,125KR^2d^2)-0,0625KR^4+0,125KR^3d-0,0625KR^2d^2$$

Termo 2

$$\int -0,25KR^2 \ln(d-R) dd \quad \begin{array}{l} u=d-R \quad du=dd \\ d=R+u \end{array}$$

$$-0,25KR^2 \int (R+u) \ln u du$$

$$-0,25KR^2 \int (R \ln u + u \ln u) du$$

$$-0,25KR^2 \left(R(u \ln u - u) + u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) \right)$$

$$-0,25KR^2 \left(Ru \ln u - Ru + \frac{u^2 \ln u}{2} - \frac{u^2}{4} \right)$$

$$\begin{array}{l} d-R \\ \left| \begin{array}{l} -0,25KR^3 u \ln u + 0,25KR^3 u - 0,125KR^2 u^2 \ln u + 0,0625KR^2 u^2 \\ 0 \end{array} \right. \\ u=d-R \quad p/d=R \quad u=R-R \quad u=0 \quad p/d=d \quad u=d-R \end{array}$$

$$-0,25KR^3(d-R) \ln(d-R) + 0,25KR^3(d-R) - 0,125KR^2(d-R)^2 \ln(d-R) + 0,0625KR^2(d-R)^2$$

$$\begin{array}{l} -0,25KR^3d \ln(d-R) + 0,25KR^4 \ln(d-R) + 0,25KR^3d - 0,25KR^4 \\ -0,125KR^2d^2 \ln(d-R) + 0,25KR^3d \ln(d-R) - 0,125KR^4 \ln(d-R) \\ + 0,0625KR^2d^2 - 0,125KR^3d + 0,0625KR^4 \end{array}$$

$$\ln(d-R)(0,125KR^4 - 0,125KR^2d^2) - 0,1875KR^4 + 0,125KR^3d + 0,0625KR^2d^2$$

Termo 3

intervalo R até d integração já feita

$$-0,25K \int_{2R}^{R+d} \left(0,25u^4 \ln u - 0,0625u^4 - Ru^3 \ln u + \frac{Ru^3}{3} + 1,5R^2u^2 \ln u \right. \\ \left. - 0,75R^2u^2 - R^3u \ln u + R^3u \right) du$$

$$-0,75R^2u^2 - R^3u \ln u + R^3u$$

$$u=R+d \quad p/d=R \quad u=R+R \quad u=2R \quad p/d=d \quad u=R+d$$

$$\begin{aligned} & -0,25K \left(0,25(R+d)^4 \ln(R+d) - 0,0625(R+d)^4 - R(R+d)^3 \ln(R+d) \right. \\ & \left. + \frac{R(R+d)^3}{3} + 1,5R^2(R+d)^2 \ln(R+d) - 0,75R^2(R+d)^2 - R^3(R+d) \ln(R+d) \right. \\ & \left. + R^3(R+d) - \left(0,25 \cdot 16R^4 \ln 2R - 0,0625 \cdot 16R^4 - R \cdot 8R^3 \ln 2R \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{R \cdot 8R^3}{3} + 1,5R^2 \cdot 4R^2 \ln 2R - 0,75R^2 \cdot 4R^2 - R^3 \cdot 2R \ln 2R + R^3 \cdot 2R \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0,25K \left(0,25R^4 \ln(R+d) + R^3d \ln(R+d) + 1,5R^2d^2 \ln(R+d) \right. \\ & \left. + Rd^3 \ln(R+d) + 0,25d^4 \ln(R+d) - 0,0625R^4 - 0,25R^3d - 0,375R^2d^2 \right. \\ & \left. - 0,25Rd^3 - 0,0625d^4 - R^4 \ln(R+d) - 3R^3d \ln(R+d) \right. \\ & \left. - 3R^2d^2 \ln(R+d) - Rd^3 \ln(R+d) + \frac{R^4}{3} + R^3d + R^2d^2 + \frac{Rd^3}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 1,5R^4 \ln(R+d) + 3R^3d \ln(R+d) + 1,5R^2d^2 \ln(R+d) - 0,75R^4 \\ & - 1,5R^3d - 0,75R^2d^2 - R^4 \ln(R+d) - R^3d \ln(R+d) + R^4 + R^3d \end{aligned}$$

$$-4R^4 \ln 2R + R^4 + 8R^4 \ln 2R - \frac{8R^4}{3} - 6R^4 \ln 2R + 3R^4$$

$$+ 2R^4 \ln 2R - 2R^4) \therefore$$

$$-0,25K (\ln(R+d)(-0,25R^4 + 0,25d^4) - \frac{7}{48}R^4 + 0,25R^3d$$

$$- 0,125R^2d^2 + \frac{Rd^3}{12} - 0,0625d^4) \therefore$$

$$\ln(R+d)(0,0625KR^4 - 0,0625Kd^4) + \frac{7KR^4}{192} - 0,0625KR^3d$$

$$+ 0,03125KR^2d^2 - \frac{KRd^3}{48} + \frac{Kd^4}{64}$$

Termo 4

$$\int 0,25Kd^3 \ln(d-R) dd \quad \begin{array}{l} u = d - R \quad du = dd \\ d = R + u \end{array}$$

$$0,25K \int (R+u)^3 \ln u du$$

$$0,25K \int (R^3 + 3R^2u + 3Ru^2 + u^3) \ln u du$$

$$0,25K \int (R^3 \ln u + 3R^2u \ln u + 3Ru^2 \ln u + u^3 \ln u) du$$

$$0,25K \int (u^3 \ln u + 3Ru^2 \ln u + 3R^2u \ln u + R^3 \ln u) du$$

$$0,25K \left(u^4 \left(\frac{\ln u}{4} - \frac{1}{16} \right) + 3Ru^3 \left(\frac{\ln u}{3} - \frac{1}{9} \right) + 3R^2u^2 \left(\frac{\ln u}{2} - \frac{1}{4} \right) + R^3(u \ln u - u) \right) \therefore$$

$$0,25K \begin{array}{l} d-R \\ | \\ 0,25u^4 \ln u - 0,0625u^4 + Ru^3 \ln u - \frac{Ru^3}{3} + 1,5R^2u^2 \ln u \\ | \\ 0 \end{array}$$

$$-0,75R^2u^2 + R^3u \ln u - R^3u \therefore$$

$$u = d - R \quad p/d = R \quad u = R - R \quad u = 0 \quad p/d = d \quad u = d - R$$

$$0,25K \left(0,25(d-R)^4 \ln(d-R) - 0,0625(d-R)^4 + R(d-R)^3 \ln(d-R) - R(d-R)^3 + 1,5R^2(d-R)^2 \ln(d-R) - 0,75R^2(d-R)^2 + R^3(d-R) \ln(d-R) - R^3(d-R) \right) \therefore$$

$$0,25K \left(0,25d^4 \ln(d-R) - d^3R \ln(d-R) + 1,5d^2R^2 \ln(d-R) - dR^3 \ln(d-R) + 0,25R^4 \ln(d-R) - 0,0625d^4 + 0,25d^3R - 0,375d^2R^2 + 0,25dR^3 - 0,0625R^4 + Rd^3 \ln(d-R) - 3d^2R^2 \ln(d-R) + 3dR^3 \ln(d-R) - R^4 \ln(d-R) - \frac{Rd^3}{3} + d^2R^2 - dR^3 + \frac{R^4}{3} \right)$$

$$+ 1,5R^2d^2 \ln(d-R) - 3dR^3 \ln(d-R) + 1,5R^4 \ln(d-R) - 0,75R^2d^2 + 1,5dR^3 - 0,75R^4 + R^3d \ln(d-R) - R^4 \ln(d-R) - R^3d - R^4 \therefore$$

$$0,25K \left(\ln(d-R) \left(0,25d^4 - 0,25R^4 \right) - 0,0625d^4 - \frac{d^3R}{12} \right)$$

$$- 0,125d^2R^2 - 0,25dR^3 + \frac{25R^4}{48} \therefore$$

$$\ln(d-R) (0,0625 K d^4 - 0,0625 K R^4) - \frac{K d^4}{64} - \frac{K d^3 R}{48}$$

$$- 0,03125 K d^2 R^2 - 0,0625 K d R^3 + \frac{25 K R^4}{192}$$

Termo 5

$$\int 0,5 K R d^2 dd \quad \therefore \quad 0,5 K R \int d^2 dd \quad \therefore \quad \frac{0,5 K R d^3}{3}$$

$$\left| \frac{K R d^3}{6} \right|_R^d \quad \therefore \quad \frac{K R d^3}{6} - \frac{K R R^3}{6} \quad \therefore \quad \frac{K R (d^3 - R^3)}{6}$$

Somando os 5 termos

$$\ln(R+d) (-0,0625 K R^4 + 0,125 K R^2 d^2 - 0,0625 K d^4)$$

$$\ln(d-R) (0,0625 K R^4 + 0,125 K R^2 d^2 + 0,0625 K d^4) - 0,25 K R^4$$

$$+ 0,125 K R^3 d + 0,125 K R d^3$$

$$\bar{E} = 0,125 K \left[\ln(R+d) (-0,5 R^4 + R^2 d^2 - 0,5 d^4) \right.$$

$$\left. + \ln(d-R) (0,5 R^4 - R^2 d^2 + 0,5 d^4) - 2 R^4 + R^3 d + R d^3 \right]$$

$$K = \frac{54 \pi}{V_c}$$

$$E = \frac{\pi S}{2V_c} \left[0,5 \ln(R+d)(-R^4 + 2R^2d^2 - d^4) \right. \\ \left. + 0,5 \ln(d-R)(R^4 - 2R^2d^2 + d^4) - 2R^4 + R^3d + Rd^3 \right]$$

fórmula da parte externa da esfera

Agora vamos testar a integração usando a planilha do excel. Através da fórmula vamos calcular o valor de E para $\frac{\pi S}{2V_c} = 1$ $R=50$ $d=65$

$$E = 1 \left[0,5 \ln(50+65)(-50^4 + 2 \cdot 50^2 \cdot 65^2 - 65^4) \right. \\ \left. + 0,5 \ln(65-50)(50^4 - 2 \cdot 50^2 \cdot 65^2 + 65^4) - 2 \cdot 50^4 + 50^3 \cdot 65 + 50 \cdot 65^3 \right]$$

$$E = 6325751,608$$

Agora vamos usar a planilha do excel

$$E_0 = \frac{Kd(R^2 - d^2)}{4} \left(\ln(d+R) - \ln(d-R) \right) + 0,5 R K d^2$$

$$\text{para } \frac{\pi S}{2V_c} = 1 \quad \frac{\pi S}{V_c} = 2 \quad \frac{54\pi}{V_c} = 8 \quad K=8$$

$$R=50 \quad d=65 \quad dd=0,1$$

Isto corresponde à 150 pedacinhos que deverão ser somados (que é o conceito da integral).

$$E_0 = \frac{8d(50^2 - d^2)}{4} \left(\ln(d+50) - \ln(d-50) \right) + 0,5 \cdot 50 \cdot 8 \cdot d^2$$

$$E_0 = 0,2d(2500 - d^2) \left(\ln(d+50) - \ln(d-50) \right) + 20d^2$$

O valor de d é o ponto médio de cada trecho.

$$E = d(64,95) + d(64,85) + \dots + d(50,05)$$

$$E = 38835,19943 + 38859,8971 + \dots + 49719,40959$$

$$E = 6325726,790$$

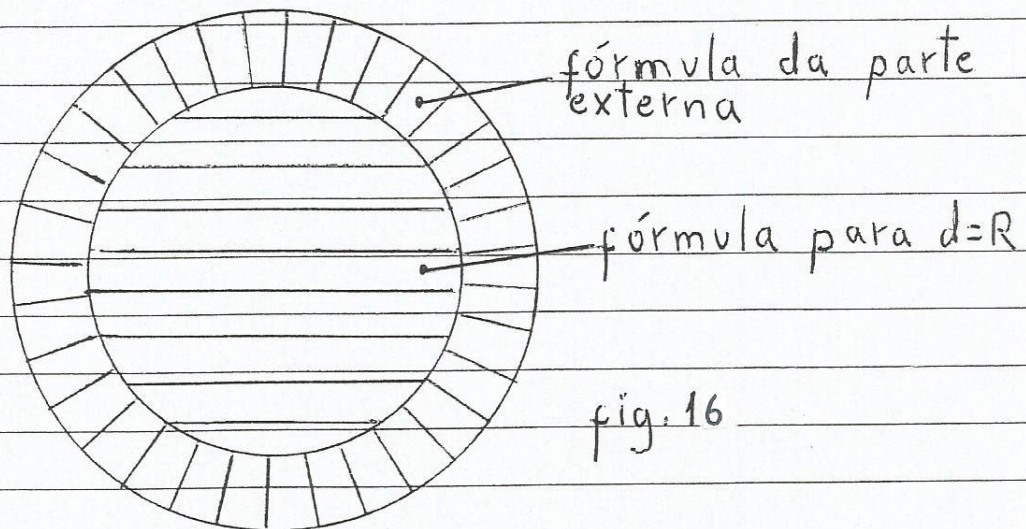
O valor está bem semelhante com a da fórmula integrada, então está correto.

Abaixo está a planilha do excel.

d	Eo	d	Eo	d	Eo	d	Eo
64.95	38835.19943	61.15	39934.01795	57.35	41513.59623	53.55	44072.05098
64.85	38859.89710	61.05	39968.20760	57.25	41564.88967	53.45	44163.34696
64.75	38884.78919	60.95	40002.72168	57.15	41616.81832	53.35	44256.46397
64.65	38909.87808	60.85	40037.56514	57.05	41669.39575	53.25	44351.47435
64.55	38935.16618	60.75	40072.74306	56.95	41722.63595	53.15	44448.45527
64.45	38960.65594	60.65	40108.26064	56.85	41776.55338	53.05	44547.48918
64.35	38986.34987	60.55	40144.12318	56.75	41831.16299	52.95	44648.66440
64.25	39012.25050	60.45	40180.33610	56.65	41886.48025	52.85	44752.07569
64.15	39038.36043	60.35	40216.90497	56.55	41942.52114	52.75	44857.82497
64.05	39064.68228	60.25	40253.83547	56.45	41999.30224	52.65	44966.02214
63.95	39091.21874	60.15	40291.13342	56.35	42056.84067	52.55	45076.78595
63.85	39117.97253	60.05	40328.80479	56.25	42115.15422	52.45	45190.24515
63.75	39144.94645	59.95	40366.85566	56.15	42174.26128	52.35	45306.53970
63.65	39172.14331	59.85	40405.29230	56.05	42234.18096	52.25	45425.82225
63.55	39199.56600	59.75	40444.12111	55.95	42294.93307	52.15	45548.25987
63.45	39227.21746	59.65	40483.34863	55.85	42356.53820	52.05	45674.03614
63.35	39255.10067	59.55	40522.98161	55.75	42419.01770	51.95	45803.35358
63.25	39283.21869	59.45	40563.02694	55.65	42482.39379	51.85	45936.43669
63.15	39311.57462	59.35	40603.49167	55.55	42546.68959	51.75	46073.53555
63.05	39340.17163	59.25	40644.38306	55.45	42611.92914	51.65	46214.93030
62.95	39369.01294	59.15	40685.70855	55.35	42678.13748	51.55	46360.93677
62.85	39398.10184	59.05	40727.47576	55.25	42745.34070	51.45	46511.91349
62.75	39427.44168	58.95	40769.69252	55.15	42813.56602	51.35	46668.27072
62.65	39457.03587	58.85	40812.36688	55.05	42882.84185	51.25	46830.48217
62.55	39486.88791	58.75	40855.50708	54.95	42953.19784	51.15	46999.10051
62.45	39517.00134	58.65	40899.12160	54.85	43024.66500	51.05	47174.77838
62.35	39547.37979	58.55	40943.21916	54.75	43097.27576	50.95	47358.29746

62.25	39578.02696	58.45	40987.80870	54.65	43171.06406	50.85	47550.61003
62.15	39608.94662	58.35	41032.89943	54.55	43246.06549	50.75	47752.90036
62.05	39640.14262	58.25	41078.50081	54.45	43322.31736	50.65	47966.67937
61.95	39671.61889	58.15	41124.62257	54.35	43399.85884	50.55	48193.93896
61.85	39703.37943	58.05	41171.27472	54.25	43478.73111	50.45	48437.42131
61.75	39735.42834	57.95	41218.46756	54.15	43558.97746	50.35	48701.13637
61.65	39767.76981	57.85	41266.21171	54.05	43640.64353	50.25	48991.50223
61.55	39800.40809	57.75	41314.51809	53.95	43723.77739	50.15	49320.48720
61.45	39833.34754	57.65	41363.39795	53.85	43808.42981	50.05	49719.40959
61.35	39866.59262	57.55	41412.86289	53.75	43894.65445	Total E= 6325726.79000	
61.25	39900.14788	57.45	41462.92487	53.65	43982.50811		

Agora vamos somar duas fórmulas para $d=R$ e a parte externa (fig. 16).



$$E = \frac{\pi S}{2V_c} \left[0,5 \ln(R+d) (-R^4 + 2R^2d^2 - d^4) \right. \\ \left. + 0,5 \ln(d-R) (R^4 - 2R^2d^2 + d^4) + R^3d + Rd^3 \right]$$

$$E = \frac{\pi S}{2V_c} \left[0,5 \ln(R+R) (-R^4 + 2R^2R^2 - R^4) \right. \\ \left. + 0,5 \ln(R-R) (R^4 - 2R^2R^2 + R^4) + R^3R + RR^3 \right]$$

$$E = \frac{\pi S}{2V_c} [0,5 \ln 2R(0) + 0,5 \ln(0)(0) + R^4 + R^4]$$

$$E = \frac{\pi S 2R^4}{2V_c}$$

Somando as duas fórmulas

$$E = \frac{\pi S}{2V_c} [0,5 \ln(R+d)(-R^4 + 2R^2d^2 - d^4) + 0,5 \ln(d-R)(R^4 - 2R^2d^2 + d^4) + R^3d + Rd^3]$$

fórmula da esfera para $d > R$

A fórmula para $d > R$ é praticamente a mesma fórmula para a esfera interna ($d \leq R$), diferenciando apenas no item $\ln(R-d)$ e $\ln(d-R)$. Se fizer na fórmula da esfera interna $\ln(|R-d|)$, fica uma única fórmula.

$$E = \frac{\pi S}{2V_c} [0,5 \ln(R+d)(-R^4 + 2R^2d^2 - d^4) + 0,5 \ln(|R-d|)(R^4 - 2R^2d^2 + d^4) + R^3d + Rd^3]$$

fórmula da esfera

Da página 05 até esta página (65), o objetivo foi deduzir a fórmula do disco e a fórmula da esfera.

O CÁLCULO DA VELOCIDADE PARA A CURVA DE ROTAÇÃO DA GALAXIA

O núcleo e o disco não são uniformes, a densidade energética é variável, então foram divididos em trechos que são aproximadamente uniformes, fornecendo uma boa precisão aos cálculos.

Os dados foram obtidos no gráfico da pagina 3, as coordenadas foram retiradas com muita precisão.

(1) Tabela da massa visível do núcleo

dist. (pc)	dist.(m)	$ V_v(Km/s) $	$M_v(Kg)$
250	7.71420E+18	237	6.4962353E+39
500	1.54284E+19	244	1.3771292E+40
750	2.31426E+19	240	1.9985213E+40
1000	3.08568E+19	230	2.4472634E+40
1250	3.85710E+19	221	2.8243571E+40
1500	4.62852E+19	212	3.1188036E+40
1750	5.39994E+19	207	3.4689959E+40
2000	6.17136E+19	200	3.7009655E+40

(2) Tabela da massa visível do disco

dist. (pc)	dist.(m)	$ V_v(Km/s) $	$M_v(Kg)$
2000	6.17136E+19	200	3.7009655E+40
3100	9.565608E+19	182	4.7503927E+40
4050	1.2497004E+20	172.5	5.5751720E+40
5000	1.54284E+20	167	6.4510142E+40
6250	1.92855E+20	162	7.5881358E+40
7500	2.31426E+20	159	8.7716352E+40
8750	2.69997E+20	155	9.7251543E+40
10000	3.08568E+20	151	1.0548214E+41
11250	3.47139E+20	148	1.1399899E+41
12500	3.85710E+20	145	1.2158250E+41
13750	4.24281E+20	141	1.2646372E+41
15330	4.73037E+20	136	1.3117379E+41

dist. (pc) - distância ao centro da galáxia em parsec
 dist. (m) - distância ao centro da galáxia em metros
 Vv - velocidade da matéria visível em Km/s
 Mv - massa da matéria visível em Kg

A distância ao centro da galáxia em (pc) e a velocidade da matéria visível em Km/s, foram obtidos através do gráfico da pag. 3. A massa da matéria visível foi calculada através da fórmula $M = V^2 \cdot d / G$, vamos ver um exemplo para distância de 250 pc no núcleo.

$$d = 7,7142 \cdot 10^{18} \text{m}$$

$$V = 237 \text{km/s} = 237000 \text{m/s}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$$

$$M = \frac{V^2 \cdot d}{G} = \frac{237000^2 \cdot 7,7142 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,4962353 \cdot 10^{39} \text{Kg}$$

(3) Tabela da densidade energética do núcleo

trecho (pc)	Mv (Kg)	volume (m ³)	dens. (Kg/m ³)	S (w/m ³)
0 - 250	6.4962353E+39	1.9229203E+57	3.3783174E-18	1.0528015E-21
250 - 500	7.2750567E+39	1.3460442E+58	5.4047679E-19	1.6843142E-22
500 - 750	6.213921E+39	3.6535486E+58	1.7007905E-19	5.3002566E-23
750 - 1000	4.487421E+39	7.1148052E+58	6.3071592E-20	1.9655308E-23
1000 - 1250	3.770937E+39	1.1729814E+59	3.2148310E-20	1.0018535E-23
1250 - 1500	2.944465E+39	1.7498575E+59	1.6826884E-20	5.2438441E-24
1500 - 1750	3.501923E+39	2.4421088E+59	1.4339749E-20	4.4687661E-24
1750 - 2000	2.319696E+39	3.2497353E+59	7.1381073E-21	2.2244832E-24

Mv - massa da matéria visível no trecho

volume (m³) = volume do trecho

dens. (Kg/m³) - densidade volumétrica do trecho

S (w/m³) - densidade energética do trecho

A massa da matéria visível do trecho foi obtida subtraindo-se os valores da tabela anterior, veremos um exemplo do trecho 250 – 500.

$$Mv=1,3771292.10^{40} - 6,4962353.10^{39} \quad Mv=7,2750567.10^{39} \text{ Kg}$$

O volume foi calculado através da fórmula $Vol=4\pi(R^3-r^3)/3$, onde o raio é a distância d.

A densidade volumétrica foi calculada dividindo a massa pelo volume.

A densidade energética é proporcional a densidade volumétrica, veremos um exemplo.

Potência da galáxia: 10^{11} sóis

Potência do núcleo: $0,3. 10^{11}$ sóis

Potência do sol: $3,84451.10^{26}$ w

Potência do núcleo: $0,3.10^{11}.3.84451.10^{26} = 1,15335.10^{37}$ w

Massa do núcleo: $3,7009655.10^{40}$ Kg

$$D=\frac{P}{m} \quad D=\frac{1,15335.10^{37}}{3,7009655.10^{40}} \quad D=3,1163489.10^{-4} \text{ w/Kg}$$

Para o trecho 0 – 250

$$S=D.dens \quad S=3,1163489.10^{-4} . 3,3783174.10^{-18} \quad S=1,0528015.10^{-21} \text{ w/m}^3$$

(4) Tabela da densidade energética do disco

trecho(pc)	Mv(Kg)	área(m ²)	dens.(Kg/m ²)	s(W/m ²)
2000 - 3100	1.0494272E+40	1.6780871E+40	0.625371114	1.78727679E-04
3100 - 4050	8.2477930E+39	2.0318015E+40	0.405934979	1.16014019E-04
4050 -5000	8.7584220E+39	2.5717208E+40	0.340566596	9.73320893E-05
5000 - 6250	1.1371216E+40	4.2064349E+40	0.270329061	7.72585821E-05
6250 - 7500	1.1834994E+40	5.1411982E+40	0.230199139	6.57896676E-05
7500 - 8750	9.5351910E+39	6.0759616E+40	0.156933035	4.48506118E-05
8750 - 10000	8.2305970E+39	7.0107249E+40	0.117400085	3.35523087E-05
10000 - 11250	8.5168500E+39	7.9454882E+40	0.107191021	3.06346134E-05
11250 - 12500	7.5835100E+39	8.8802516E+40	0.085397467	2.44061337E-05
12500 - 13750	4.8812200E+39	9.8150149E+40	0.049732171	1.42131852E-05
13750 - 15330	4.7100700E+39	1.3744353E+41	0.034269128	9.79393120E-06

M_v – massa da matéria visível no trecho
 área (m^2) – área do trecho
 dens. (Kg/m^2) – densidade de superfície do trecho
 s (w/m^2) – densidade energética do trecho

A massa da matéria visível do trecho foi obtida subtraindo-se os valores da tabela 2, veremos um exemplo do trecho 2000 – 3100.

$$M_v = 4,7503927 \cdot 10^{40} - 3,7009655 \cdot 10^{40} \quad M_v = 1,0494272 \cdot 10^{40} \text{ Kg}$$

A área foi calculada através da fórmula $A = \pi(R^2 - r^2)$, onde o raio é a distância d .

A densidade de superfície foi calculada dividindo a massa pela área.

A densidade energética é proporcional a densidade de superfície, veremos um exemplo.

Potência da galáxia: 10^{11} sóis

Potência do disco: $0,7 \cdot 10^{11}$ sóis

Potência do sol: $3,84451 \cdot 10^{26}$ w

Potência do disco: $0,7 \cdot 10^{11} \cdot 3,84451 \cdot 10^{26} = 2,69116 \cdot 10^{37}$ w

Massa do disco: $1,3117379 \cdot 10^{41} - 3,7009655 \cdot 10^{40} = 9,4164135 \cdot 10^{40}$ Kg

$$D = \frac{P}{m} \quad D = \frac{2,69116 \cdot 10^{37}}{9,4164135 \cdot 10^{40}} \quad D = 2,857945862 \cdot 10^{-4} \text{ w/Kg}$$

Para o trecho 2000 - 3100

$$s = D \cdot \text{dens} \quad s = 2,857945862 \cdot 10^{-4} \cdot 0,625371114 \quad s = 1,787276788 \cdot 10^{-4} \text{ w/m}^2$$

A curva de rotação da galáxia foi dividida em 14 órbitas, com distâncias em parsec: 500, 2000 (final do núcleo), 3100, 5000, 7500, 10000, 12500, 15330 (final do disco), 17500, 20000, 22500, 25000, 27500, 30000.

A próxima tabela é para determinar a energia contida no interior de cada órbita, para isso usaremos a fórmula da esfera emissora de luz, para calcular a emissão energética do núcleo, e a fórmula do disco emissor de luz, para calcular a emissão energética do disco, somando os dois se tem a energia total.

(5) Tabela da energia no interior das órbitas

raio da órbita(pc)	E núcleo(joule)	E disco(joule)	E Total(joule)
500	2.2579504E+47	4.6175078E+45	2.3041254E+47
2000	2.1510818E+48	3.2843158E+47	2.4795133E+48
3100	3.5506865E+48	1.3683228E+48	4.9190093E+48
5000	5.8577508E+48	4.6559081E+48	1.0513658E+49
7500	8.8518210E+48	1.1231850E+49	2.0083671E+49
10000	1.1832441E+49	1.9276375E+49	3.1108816E+49
12500	1.4807829E+49	2.8018880E+49	4.2826709E+49
15330	1.8173002E+49	3.7641904E+49	5.5814906E+49
17500	2.0751962E+49	4.4444355E+49	6.5196317E+49
20000	2.3722263E+49	5.1968736E+49	7.5690999E+49
22500	2.6692185E+49	5.9325406E+49	8.6017591E+49
25000	2.9661566E+49	6.6579843E+49	9.6241409E+49
27500	3.2630638E+49	7.3766201E+49	1.0639683E+50
30000	3.5599477E+49	8.0904303E+49	1.1650378E+50

Para fazer os cálculos citados acima, foi usado duas planilhas do excel, uma para o núcleo e outra para o disco. O disco e o núcleo foram divididos em trechos com densidade energética diferente então foi calculado a energia em cada trecho, veremos um exemplo na órbita de raio 30000pc ($9,25704 \cdot 10^{20}$ m), a energia irradiada pelo núcleo. No trecho 250 – 500, tem que calcular a energia para 500pc ($1.54284 \cdot 10^{19}$ m) e diminuir da energia dos 250pc ($7,7142 \cdot 10^{18}$ m), e assim nos outros trechos. Os 8 primeiros cálculos da energia é para a parte positiva e os outros 7 seguintes é para a parte negativa, depois foi feito o somatório da parte positiva e da parte negativa. Subtraindo a parte negativa da parte positiva se obtém a energia irradiada pelo núcleo dentro daquela órbita.

A planilha do excel para o núcleo está no anexo I, e para o disco está no anexo II.

A CONSTANTE DE GRAVITAÇÃO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Para o cálculo das velocidades nas órbitas é necessário ter a constante de

gravitação das ondas eletromagnéticas, que tem uma tendência de ser diferente e maior do que a constante de gravitação universal $G=6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$.

A matéria é formada de átomos, mas as ondas eletromagnéticas não, ela é campos elétricos e campos magnéticos oscilantes (suas partículas foram chamadas de fótons), é de se esperar que sua constante de gravitação seja muito maior.

Vamos calcular a constante de gravitação das ondas eletromagnéticas (luz), usando a velocidade da última órbita do gráfico, de raio igual a 30000 pc, vai ser usada a fórmula deduzida abaixo:

A força de atração gravitacional vai ser a soma da força causada pela matéria visível mais a força causada pelas ondas eletromagnéticas.

$$F = \frac{G.M.m}{d^2} + \frac{G_e.Me.m}{d^2} \quad F = \frac{m.V^2}{d} \quad \frac{m.V^2}{d} = \frac{m.(G.M + G_e.Me)}{d^2}$$

$$V^2 = \frac{G.M + G_e.Me}{d}$$

$$G_e = \frac{V^2.d - G.M}{Me}$$

G_e - constante de gravitação das ondas eletromagnéticas

V - velocidade na órbita

d - raio da órbita

G - constante de gravitação universal

M - massa da matéria visível

Me - massa das ondas eletromagnéticas

Para a órbita de 30000 pc

V - 211Km/s - 211000m/s

d - 30000 pc - $9,25704.10^{20}$ m

G - $6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$

M - $1,4326289.10^{41}$ Kg

Me - $1,2962793.10^{33}$ Kg

A Me foi calculada através da formula $E=m.Vc^2$, onde E é a energia na órbita de 30000 pc.

$$1,1650378 \cdot 10^{50} = m \cdot 299792458^2 \quad m = 1,2962793 \cdot 10^{33} \text{ Kg}$$

$$Ge = \frac{211000^2 \cdot 9,25704 \cdot 10^{20} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,4326289^{41}}{1,2962793 \cdot 10^{33}}$$

$$Ge = 0,024421922 \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

Feito o cálculo do Ge, vamos calcular as velocidades nas outras 13 órbitas, para ver se o valor se iguala com as velocidades observadas.

Abaixo está a tabela (6), das velocidades nas órbitas.

A	B	C	D	E	F	G	H
500	1.54284E+19	244	1.3771292E+40	2.5636853E+30	252.179	246	6.179
2000	6.17136E+19	200	3.7009655E+40	2.7588307E+31	225.649	219	6.649
3100	9.565608E+19	182	4.7503927E+40	5.4731359E+31	217.019	215	2.019
5000	1.54284E+20	167	6.4510142E+40	1.1698023E+32	215.421	219	-3.579
7500	2.31426E+20	159	8.7716352E+40	2.2346097E+32	221.048	223	-1.952
10000	3.08568E+20	151	1.0548214E+41	3.4613225E+32	224.045	225	-0.955
12500	3.85710E+20	145	1.2158250E+41	4.7651140E+32	226.266	225	1.266
15330	4.73037E+20	136	1.3117379E+41	6.2102458E+32	224.852	222	2.852
17500	5.39994E+20	130	1.3682006E+41	7.2540685E+32	222.952	221	1.952
20000	6.17133E+20	124	1.4226442E+41	8.4217594E+32	220.689	218	2.689
22500	6.94278E+20	117	1.4248832E+41	9.5707477E+32	217.612	216	1.612
25000	7.71420E+20	111	1.4249873E+41	1.0708300E+33	214.992	214	0.992
27500	8.48562E+20	106	1.4294516E+41	1.1838244E+33	212.854	212.5	0.354
30000	9.25704E+20	101.6	1.4326289E+41	1.2962793E+33	211.000	211	0.000

A – d(pc), raio da órbita em parsec

B – d(m), raio da órbita em metros

C – Vv(Km/s), velocidade da matéria visível em Km/s

D – Mv(Kg), massa da matéria visível em Kg

E – Mc(Kg), massa das ondas eletromagnéticas Kg

F – V(Km/s), velocidade calculada em Km/s

G – Vobs(Km/s), velocidade observada em Km/s

H – diferença entre a velocidade observada e a velocidade calculada

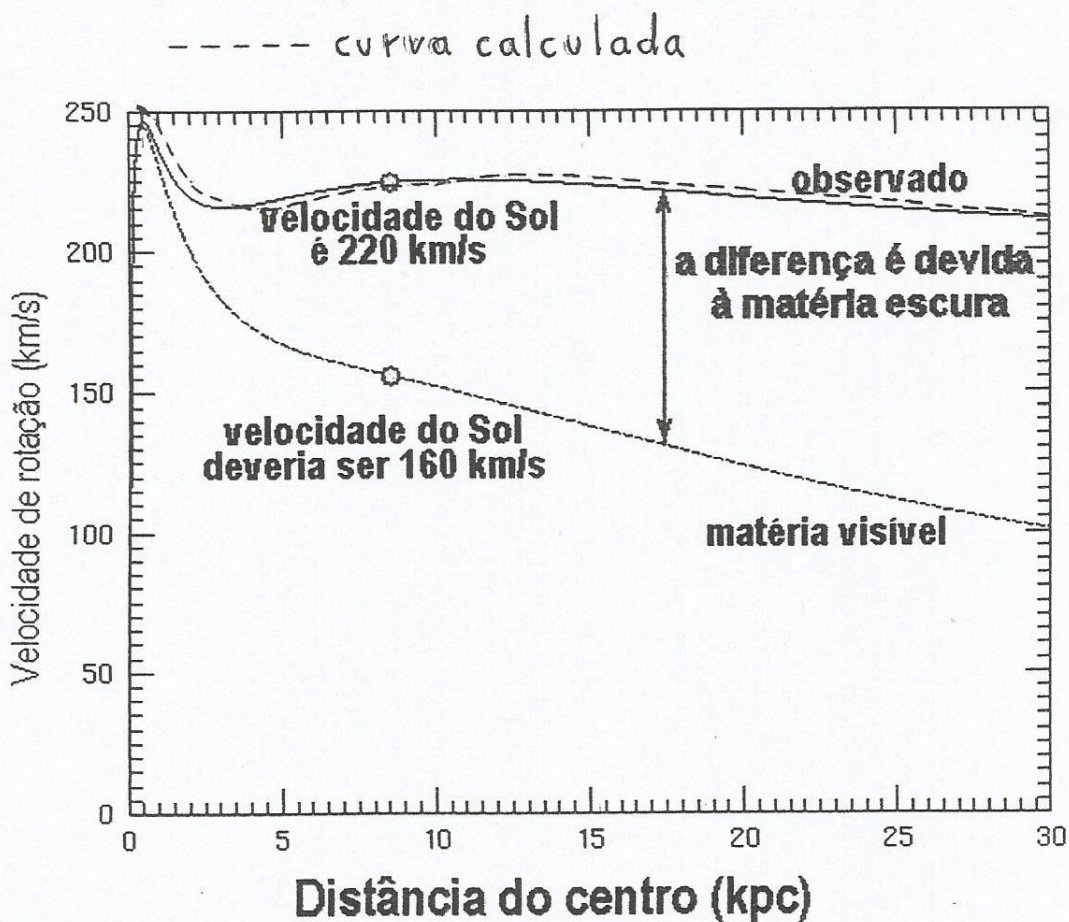
A M_e foi calculada usando a fórmula $E=m.Vc^2$, onde E é a energia total contida na tabela (5).

A velocidade foi calculada usando a fórmula $V^2 = \frac{G.M + G_e.M_e}{d}$

Vamos agora analisar o resultado:

A diferença da velocidade calculada e da velocidade observada ficou uma média de 1,838 m/s, em onze pontos no disco, isto é uma diferença pequena e o resultado foi ótimo. Nas duas órbitas do núcleo (500 e 2000), deu uma diferença maior, de média 6,414 Km/s, isto é bem aceitável, pois a curva da matéria visível foi montada por observação e contagem, e não por cálculo, observar o disco é bem mais fácil que observar o núcleo.

Abaixo está o gráfico da curva observada e da curva calculada.



A influência das ondas eletromagnéticas(luz) na órbita do sistema solar é insignificante, mas quando as órbitas se tornam enormes, como na rotação da via láctea (também em outras galáxias) e nas órbitas das galáxias em aglomerados de galáxias, as ondas eletromagnéticas se tornam marcantes, e quanto maior a órbita maior é a sua influência.

Na órbita de plutão:

Distância média de plutão ao sol = 5913520000Km ou $5,91352 \cdot 10^{12}$ m

$$E = P \cdot t \quad t = \frac{d}{Vc} \quad t = \frac{5,91352 \cdot 10^{12}}{299792458} \quad t = 19725,37948s$$

Potência do sol: $3,84451 \cdot 10^{26}$ w

$$E = P \cdot t \quad E = 3,84451 \cdot 10^{26} \cdot 19725,37948 \quad E = 7,5834418 \cdot 10^{30} \text{ J}$$

$$E = m \cdot Vc^2 \quad m = \frac{E}{Vc^2} \quad m = \frac{7,5834418 \cdot 10^{30}}{299792458^2} \quad m = 8,4377169 \cdot 10^{13} \text{ Kg}$$

Vamos chamar de massa gravitacional, a massa vezes a sua constante gravitacional, sua unidade é N.m²/Kg.

Então a massa gravitacional das ondas eletromagnéticas na órbita de plutão é:

$$mg = 8,4377169 \cdot 10^{13} \cdot 0,024421922 \quad mg = 2,0606526 \cdot 10^{12} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

A massa gravitacional do sol é:

$$mg = 1,98892 \cdot 10^{30} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \quad mg = 1,3266096 \cdot 10^{20} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

$$X = \frac{1,3266096 \cdot 10^{20}}{2,0606526 \cdot 10^{12}} \quad X = 6,44 \cdot 10^7$$

A massa gravitacional do sol é $6,44 \cdot 10^7$ maior que a massa gravitacional das ondas eletromagnéticas. Veremos agora a influência das ondas eletromagnéticas na velocidade da órbita de plutão.

Apenas com a massa do sol:

$$V^2 = \frac{G \cdot M}{d} \quad V^2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98892 \cdot 10^{30}}{5,91352 \cdot 10^{12}} \quad V = 4736,401821 \text{ m/s}$$

Agora com a massa das ondas eletromagnéticas:

$$V^2 = \frac{G \cdot M + Ge \cdot Me}{d}$$

$$V^2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98892 \cdot 10^{30} + 0,024421922 \cdot 8,4377169 \cdot 10^{13}}{5,91352 \cdot 10^{12}}$$

$$V = 4736,401858\text{m/s}$$

No cálculo da velocidade, resultou numa diferença insignificante de 0,000037m/s.

Veremos agora a influência da rotação na extremidade do disco da via láctea. O raio do disco galáctico é 15330pc ou $4,73037 \cdot 10^{20}$ m.

Na tabela 6, onde foi feito o cálculo da rotação da galáxia tiramos a massa da matéria visível que é $1,3117379 \cdot 10^{41}$ Kg e a massa das ondas eletromagnéticas que é $6,2102458 \cdot 10^{32}$ Kg, vamos calcular suas massas gravitacionais.

$$\text{Massa gravitacional da matéria visível: } mg = 1,3117379 \cdot 10^{41} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}$$

$$mg = 8,7492917 \cdot 10^{30} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

Massa gravitacional das ondas eletromagnéticas:

$$mg = 6,2102458 \cdot 10^{32} \cdot 0,024421922 \quad mg = 1,5166613 \cdot 10^{31} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

$$X = \frac{1,5166613 \cdot 10^{31}}{8,7492917 \cdot 10^{30}} \quad X = 1,733$$

A massa gravitacional das ondas eletromagnéticas é 1,733 vezes a da matéria visível.

Veremos agora a influência das ondas eletromagnéticas na órbita das galáxias no aglomerado da virgem, onde o raio das órbitas são muito grandes.

$$\text{Raio} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ pc} - 4,6285 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

$$\text{Massa} = 1 \cdot 10^{14} \text{ sóis} - 1,98892 \cdot 10^{44} \text{ Kg}$$

$$\text{Potência} = 1 \cdot 10^{14} \text{ sóis} - 3,84451 \cdot 10^{40} \text{ w}$$

Na extremidade 50% da energia eletromagnética fica interna à órbita e no centro 100% da energia fica interna, então vamos multiplicar por 0,75 como uma média aproximada.

$$P = 3,84451 \cdot 10^{40} \cdot 0,75 \quad P = 2,88338 \cdot 10^{40} \text{ w}$$

$$E = P \cdot t \quad t = \frac{R}{Vc} \quad t = \frac{4,6285 \cdot 10^{22}}{299792458} \quad t = 1,5439 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

$$E = 2,88338 \cdot 10^{40} \cdot 1,5439 \cdot 10^{14} \quad E = 4,45165 \cdot 10^{54} \text{ J}$$

$$E = m \cdot Vc^2 \quad m = \frac{E}{Vc^2} \quad m = \frac{4,45165 \cdot 10^{54}}{299792458^2} \quad m = 4,95313 \cdot 10^{37} \text{ Kg}$$

Vamos calcular as massas gravitacionais:

Da matéria visível:

$$mg = 1,98892 \cdot 10^{44} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \quad mg = 1,32661 \cdot 10^{34} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

Das ondas eletromagnéticas:

$$mg = 4,95313 \cdot 10^{37} \cdot 0,024421922 \quad mg = 1,20965 \cdot 10^{36} \text{ N.m}^2/\text{Kg}$$

$$X = \frac{1,20965 \cdot 10^{36}}{1,32661 \cdot 10^{34}} \quad X = 91,18$$

A massa das ondas eletromagnéticas representa 91,18 vezes maior que a massa da matéria visível, o que se encaixa com os primeiros trabalhos de Zwicky, onde falou que a matéria escura era 100 vezes a matéria visível, a qual era difícil de se acreditar.

SIMULAÇÕES

Agora vamos fazer 3 simulações, calculando-se um índice na última órbita, e depois calculando as outras velocidades, igual ao que foi feito para as ondas eletromagnéticas; analisando assim o comportamento da curva.

SIMULAÇÃO 1

Vamos imaginar que a matéria escura seja uma substância de densidade homogênea distribuída pela galáxia, com uma constante gravitacional normal de $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$. Vamos calcular a sua densidade usando a órbita de 30Kpc com sua velocidade de 211Km/s, depois vamos calcular a velocidade nos outros pontos e montar a curva.

Mt – massa total

Me – massa da matéria escura

Mv – massa da matéria visível

$$Mt = \frac{V^2 \cdot d}{G} \quad V = 211\text{Km/s} = 2,11 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad d = 9,25704 \cdot 10^{20} \text{ m} \\ G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

$$Mt = \frac{(2,11 \cdot 10^5)^2 \cdot 9,25704 \cdot 10^{20}}{6,67 \cdot 10^{-11}} \quad Mt = 6,1789007 \cdot 10^{41} \text{ Kg}$$

$$Me = Mt - Mv \quad Me = 6,1789007 \cdot 10^{41} - 1,4326289 \cdot 10^{41}$$

$$M_e = 4,7462718 \cdot 10^{41} \text{ Kg}$$

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \text{Vol} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9,25704 \cdot 10^{20})^3$$

$$\text{Vol} = 3,3228063 \cdot 10^{63} \text{ m}^3$$

$$\frac{\text{den} = m}{\text{Vol}} \quad \text{den} = \frac{4,7462718 \cdot 10^{41}}{3,3228063 \cdot 10^{63}} \quad \text{den} = 1,4283925 \cdot 10^{-22} \text{ Kg/m}^3$$

Vamos calcular as velocidades com a planilha de excel anexada.

A	B	C	D	E	F	G	H
500	1.542840E+19	1.3771292E+40	2.1973480E+36	1.3773489E+40	244.019	246	-1.981
2000	6.171360E+19	3.7009655E+40	1.4063027E+38	3.7150285E+40	200.380	219	-18.620
3100	9.565608E+19	4.7503927E+40	5.2368955E+38	4.8027617E+40	183.000	215	-32.000
5000	1.542840E+20	6.4510142E+40	2.1973480E+39	6.6707490E+40	169.820	219	-49.180
7500	2.314260E+20	8.7716352E+40	7.4160495E+39	9.5132401E+40	165.585	223	-57.415
10000	3.085680E+20	1.0548214E+41	1.7578784E+40	1.2306092E+41	163.098	225	-61.902
12500	3.857100E+20	1.2158250E+41	3.4333562E+40	1.5591606E+41	164.202	225	-60.798
15330	4.730370E+20	1.3117379E+41	6.3331752E+40	1.9450554E+41	165.608	222	-56.392
17500	5.399940E+20	1.3682006E+41	9.4211295E+40	2.3103135E+41	168.929	221	-52.071
20000	6.171330E+20	1.4226442E+41	1.4062822E+41	2.8289264E+41	174.858	218	-43.142
22500	6.942780E+20	1.4248832E+41	2.0023334E+41	3.4272166E+41	181.454	216	-34.546
25000	7.714200E+20	1.4249873E+41	2.7466850E+41	4.1716723E+41	189.921	214	-24.079
27500	8.485620E+20	1.4294516E+41	3.6558377E+41	5.0852893E+41	199.930	212.5	-12.570
30000	9.257040E+20	1.4326289E+41	4.7462717E+41	6.1789006E+41	211.000	211	0.000

A – d(pc), raio da órbita em parsec

B – d(m), raio da órbita em metros

C – Mv(Kg), massa da matéria visível em Kg

D – Me(Kg), massa da matéria escura em Kg

E – Mt(Kg), massa da matéria total em Kg

F – V(Km/s), velocidade calculada em Km/s

G – Vobs(Km/s), velocidade observada em Km/s

H – diferença entre a velocidade observada e a velocidade calculada

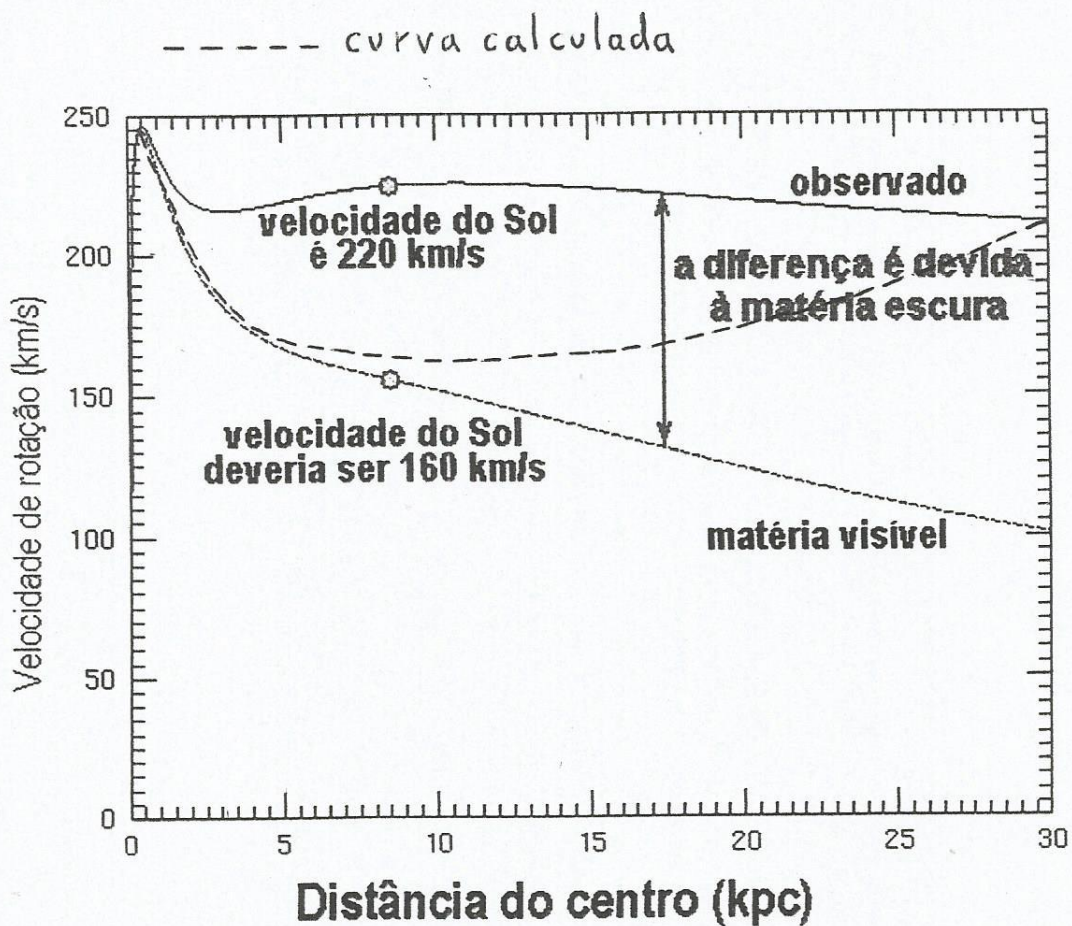
O cálculo de Me foi feito pela fórmula:

$$Me = \text{Vol} \cdot \text{den} \quad Me = \frac{4 \cdot \pi \cdot d^3}{3} \cdot 1,4283925 \cdot 10^{-22}$$

O cálculo da velocidade foi feito pela fórmula:

$$V^2 = \frac{G \cdot Mt}{d}$$

Abaixo está o gráfico da curva calculada, e verificamos que ela se desvia de seu caminho.



SIMULAÇÃO 2

Esta simulação é a mesma da simulação 1, mudando apenas a constante de gravitação que será uma média geométrica entre a constante de gravitação universal $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$ e a constante de gravitação das ondas eletromagnéticas $0,024421922 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$, que resulta em $1,2763 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$.

$$V^2 = \frac{G.Mv + Ge.Me}{d} \quad Me = \frac{d.V^2 - G.Mv}{Ge}$$

$$d = 9,25704 \cdot 10^{20} \text{ m} \quad V = 2,11 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

$$Mv = 1,4326289 \cdot 10^{41} \text{ Kg} \quad Ge = 1,2763 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

$$Me = \frac{9,25704 \cdot 10^{20} \cdot (2,11 \cdot 10^5)^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,4326289 \cdot 10^{41}}{1,2763 \cdot 10^{-6}}$$

$$Me = 2,4804225 \cdot 10^{37} \text{ Kg}$$

$$\text{Vol} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \text{Vol} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9,25704 \cdot 10^{20})^3 \quad \text{Vol} = 3,3228063 \cdot 10^{63} \text{ m}^3$$

$$\text{den} = \frac{m}{\text{Vol}} \quad \text{den} = \frac{2,4804225 \cdot 10^{37}}{3,3228063 \cdot 10^{63}} \quad \text{den} = 7,4648422 \cdot 10^{-27} \text{ Kg/m}^3$$

Vamos calcular as velocidades com a planilha de excel anexada.

A	B	C	D	E	F	G
500	1.542840E+19	1.3771292E+40	1.1483437E+32	244.019	246	-1.981
2000	6.171360E+19	3.7009655E+40	7.3494000E+33	200.380	219	-18.620
3100	9.565608E+19	4.7503927E+40	2.7368247E+34	183.000	215	-32.000
5000	1.542840E+20	6.4510142E+40	1.1483437E+35	169.820	219	-49.180
7500	2.314260E+20	8.7716352E+40	3.8756602E+35	165.585	223	-57.415
10000	3.085680E+20	1.0548214E+41	9.1867500E+35	163.098	225	-61.902
12500	3.857100E+20	1.2158250E+41	1.7942871E+36	164.202	225	-60.798
15330	4.730370E+20	1.3117379E+41	3.3097453E+36	165.608	222	-56.392
17500	5.399940E+20	1.3682006E+41	4.9235238E+36	168.929	221	-52.071
20000	6.171330E+20	1.4226442E+41	7.3492928E+36	174.858	218	-43.142
22500	6.942780E+20	1.4248832E+41	1.0464282E+37	181.454	216	-34.546
25000	7.714200E+20	1.4249873E+41	1.4354297E+37	189.921	214	-24.079
27500	8.485620E+20	1.4294516E+41	1.9105569E+37	199.930	212.5	-12.570
30000	9.257040E+20	1.4326289E+41	2.4804225E+37	211.000	211	0.000

- A – d(pc), raio da órbita em parsec
 B – d(m), raio da órbita em metros
 C – Mv(Kg), massa da matéria visível em Kg
 D – Me(Kg), massa da matéria escura em Kg
 E – V(Km/s), velocidade calculada em Km/s
 F – Vobs(Km/s), velocidade observada em Km/s
 G – diferença entre a velocidade observada e a velocidade calculada

O cálculo de Me foi feito pela fórmula:

$$Me = Vol \cdot den \quad Me = \frac{4 \cdot \pi \cdot d^3 \cdot 7,4648422 \cdot 10^{-27}}{3}$$

O cálculo da velocidade foi feito pela fórmula:

$$V^2 = \frac{G \cdot Mv + Ge \cdot Me}{d}$$

Analisando os valores das velocidades, veremos que ela ficou idêntica à da simulação 1, e a curva também será idêntica, o que parece não depender da constante de gravitação da matéria escura, então faremos uma fórmula genérica para verificar a situação.

₃₀ – valores correspondente à órbita de 30Kpc

$$V^2 = \frac{G \cdot Mv + Ge \cdot Me}{d} \quad Me = Vol \cdot den \quad den = \frac{Me_{30}}{Vol_{30}}$$

$$Me_{30} = \frac{d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot Mv_{30}}{Ge} \quad den = \frac{d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot Mv_{30}}{Ge \cdot Vol_{30}}$$

$$Me = \frac{Vol \cdot (d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot Mv_{30})}{Ge \cdot Vol_{30}} \quad V^2 = \frac{G \cdot Mv + \frac{Ge \cdot Vol \cdot (d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot Mv_{30})}{Ge \cdot Vol_{30}}}{d}$$

$$V^2 = \frac{G \cdot Mv}{d} + \frac{Vol \cdot (d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot Mv_{30})}{d \cdot Vol_{30}}$$

A Ge foi cortada, então as velocidades não dependem da constante de gravitação da matéria escura. Desta forma é impossível que a matéria escura esteja distribuída de forma homogênea pela galáxia.

SIMULAÇÃO 3

Vamos imaginar que a matéria escura seja uma substância irradiada da mesma forma que as ondas eletromagnéticas, mas a sua irradiação esteja concentrada no centro da galáxia, e que a constante de gravitação seja igual as das ondas eletromagnéticas $0,024421922 \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$.

Vamos calcular o fluxo de irradiação para que a órbita de 30Kpc se encaixe na sua velocidade, depois vamos calcular a velocidade nos outros pontos e montar a curva.

$$V^2 = \frac{G.Mv + Ge.Me}{d} \quad Me = \frac{d.V^2 - G.Mv}{Ge}$$

$$d = 9,25704.10^{20} \text{ m} \quad V = 2,11.10^5 \text{ m/s} \quad G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

$$Mv = 1,4326289.10^{41} \text{ Kg} \quad Ge = 0,024421922 \text{ N.m}^2/\text{Kg}^2$$

$$Me = \frac{9,25704.10^{20} \cdot (2,11.10^5)^2 - 6,67.10^{-11} \cdot 1,4326289.10^{41}}{0,024421922}$$

$$Me = 1,2962793.10^{33} \text{ Kg}$$

O cálculo do fluxo de matéria será semelhante ao da energia.

$$E = P.t \quad t = \frac{d}{Vc} \quad E = \frac{P.d}{Vc}$$

No lugar de E(energia) será Me(massa), e no lugar de P(potência) será F(fluxo).

$$Me = F.t \quad t = \frac{d}{Vc} \quad Me = \frac{F.d}{Vc}$$

$$Me = 1,2962793.10^{33} \text{ Kg} \quad d = 9,25704.10^{20} \text{ m} \quad Vc = 299792458 \text{ m/s}$$

$$1,2962793.10^{33} = \frac{F \cdot 9,25704.10^{20}}{299792458} \quad F = 4,1980455.10^{20} \text{ Kg/s}$$

Vamos calcular as velocidades com a planilha de excel anexada.

A	B	C	D	E	F	G
500	1.542840E+19	1.3771292E+40	2.1604655E+31	306.161	246	60.161
2000	6.171360E+19	3.7009655E+40	8.6418619E+31	272.394	219	53.394
3100	9.565608E+19	4.7503927E+40	1.3394886E+32	259.466	215	44.466
5000	1.542840E+20	6.4510142E+40	2.1604655E+32	249.174	219	30.174
7500	2.314260E+20	8.7716352E+40	3.2406982E+32	243.884	223	20.884
10000	3.085680E+20	1.0548214E+41	4.3209309E+32	238.746	225	13.746
12500	3.857100E+20	1.2158250E+41	5.4011637E+32	234.997	225	9.997
15330	4.730370E+20	1.3117379E+41	6.6240187E+32	229.553	222	7.553
17500	5.399940E+20	1.3682006E+41	7.5616291E+32	226.050	221	5.050
20000	6.171330E+20	1.4226442E+41	8.6418198E+32	222.653	218	4.653
22500	6.942780E+20	1.4248832E+41	9.7220946E+32	218.832	216	2.832
25000	7.714200E+20	1.4249873E+41	1.0802327E+33	215.684	214	1.684
27500	8.485620E+20	1.4294516E+41	1.1882560E+33	213.154	212.5	0.654
30000	9.257040E+20	1.4326289E+41	1.2962793E+33	211.000	211	0.000

A – d(pc), raio da órbita em parsec

B – d(m), raio da órbita em metros

C – Mv(Kg), massa da matéria visível em Kg

D – Me(Kg), massa da matéria escura em Kg

E – V(Km/s), velocidade calculada em Km/s

F – Vobs(Km/s), velocidade observada em Km/s

G – diferença entre a velocidade observada e a velocidade calculada

O cálculo de Me foi feito pela fórmula:

$$Me = \frac{F \cdot d}{V_c} \quad Me = \frac{4,1980455 \cdot 10^{20} \cdot d}{299792458} \quad Me = 1,4003172 \cdot 10^{12} \cdot d$$

O cálculo da velocidade foi feito pela fórmula:

$$V^2 = \frac{G \cdot M_v + G_e \cdot M_e}{d}$$

Analisando a curva, veremos que ela se desviou do caminho.

----- curva calculada

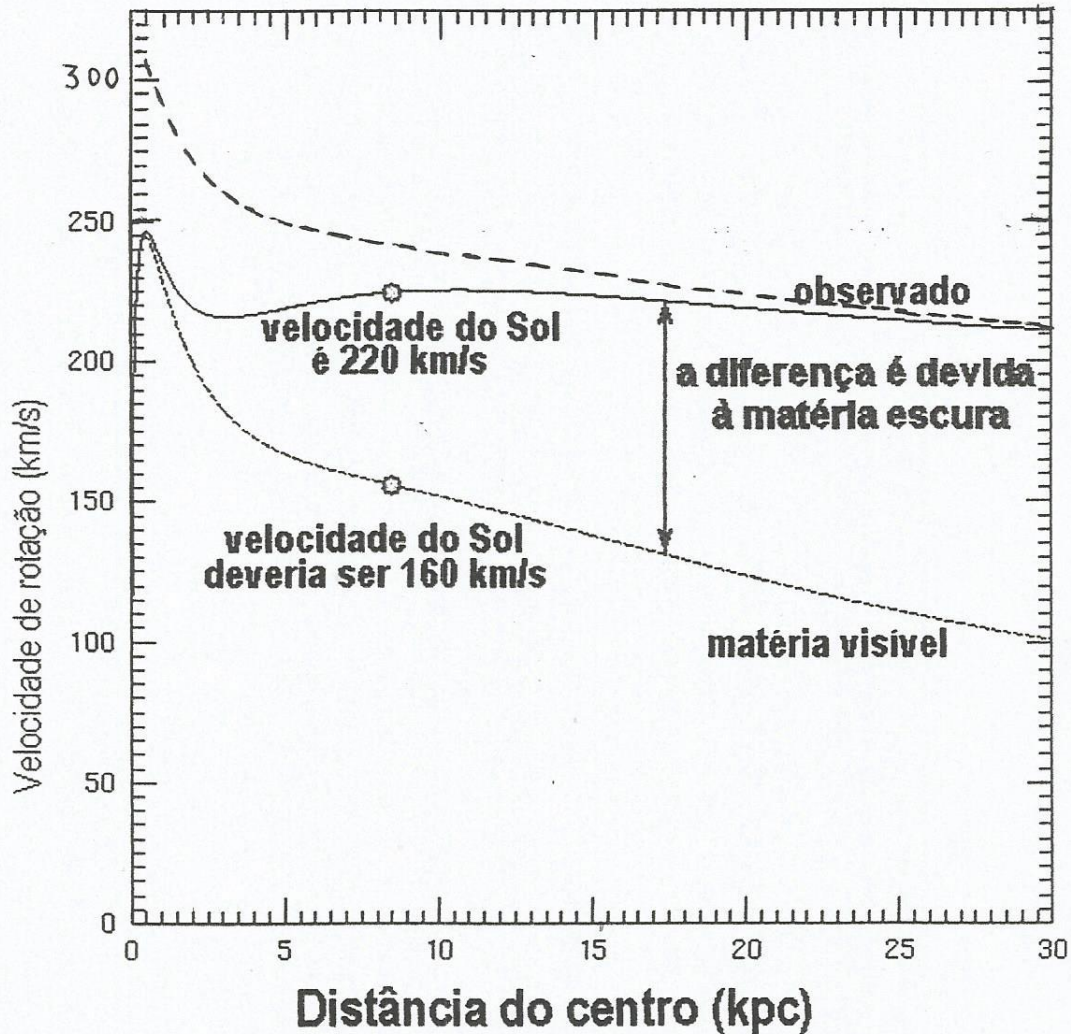


fig.19

Vamos fazer uma fórmula genérica para ver se as velocidades dependerão da constante de gravitação da matéria escura.

$$V^2 = \frac{G \cdot M_v + G_e \cdot M_e}{d} \quad M_e = \frac{F \cdot d}{V_c} \quad V^2 = \frac{G \cdot M_v + G_e \cdot F \cdot d}{V_c \cdot d}$$

$$M_{e30} = \frac{d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot M_{v30}}{G_e} \quad F = \frac{M_{e30} \cdot V_c}{d_{30}} \quad F = \frac{V_c \cdot (d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot M_{v30})}{G_e \cdot d_{30}}$$

$$V^2 = \frac{G \cdot M_v + \frac{G_e \cdot d \cdot V_c \cdot (d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot M_{v30})}{G_e \cdot d_{30} \cdot V_c}}{d} \quad V^2 = \frac{G \cdot M_v}{d} + \frac{d_{30} \cdot V_{30}^2 - G \cdot M_{v30}}{d_{30}}$$

A Ge foi cortada, então as velocidades não dependem da constante de gravitação da matéria escura. Desta forma é impossível que a matéria escura seja irradiada do centro da galáxia igual as ondas eletromagnéticas.

Foi feito 3 simulações calculando-se índices a partir da velocidade na órbita externa de 30Kpc, e a curva se desviou de seu caminho, já para o caso das ondas eletromagnéticas emitida pelas estrelas, a curva não se desviou de seu caminho.

A DENSIDADE DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Vamos calcular a densidade das ondas eletromagnéticas do sol que chega à Terra.

Potência do sol = 1367w/m² em 1m² de área possui 1367w

Tempo para a luz percorrer 1metro $t = \frac{1\text{metro}}{Vc}$ $t = \frac{1}{299792458}$

$t = 3,3356409 \cdot 10^{-9}$ s

$E = P \cdot t$ $E = 1367 \cdot 3,3356409 \cdot 10^{-9}$ $E = 4,5598211 \cdot 10^{-6}$ J

$E = m \cdot V^2c$ $m = \frac{E}{V^2c}$ $m = \frac{4,5598211 \cdot 10^{-6}}{299792458^2}$ $m = 5,0734852 \cdot 10^{-23}$ Kg

Então em 1m³ tem 5,0734852.10⁻²³ Kg den = 5,0734852.10⁻²³ Kg/m³
ou den = 5,0734852.10⁻²⁶ g/cm³

Então veremos em um volume igual ao Planeta Terra, a massa das ondas eletromagnéticas do sol que chega a Terra:

Raio da Terra = 6371Km ou 6371000m $Vol = \frac{4\pi R^3}{3}$

$Vol = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371000^3$ $Vol = 1,0832069 \cdot 10^{21}$ m³

$m = den \cdot Vol$ $m = 5,0734852 \cdot 10^{-23} \cdot 1,0832069 \cdot 10^{21}$ $m = 0,054956$ Kg

$m = 54,956$ g

As ondas eletromagnéticas é algo extremamente tênue, em um volume igual ao do Planeta Terra, a massa das ondas eletromagnéticas do sol que chega a Terra é de apenas 55 gramas.

ANEXO I (Núcleo)

R(m)	d(m)	S(w/m ³)	E(joule)	E ^{total} (Joule)
9.2570400E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	6.2508542E+48	3.5599477E+49
9.2570400E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	7.9999611E+48	
9.2570400E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	8.4958194E+48	
9.2570400E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	7.4672759E+48	
9.2570400E+20	3.8571000E+19	1.0018535E-23	7.4329683E+48	
9.2570400E+20	4.6285200E+19	5.2438441E-24	6.7217932E+48	
9.2570400E+20	5.3999400E+19	4.4687661E-24	9.0946260E+48	
9.2570400E+20	6.1713600E+19	2.2244832E-24	6.7563407E+48	
			Σ + 6.0219639E+49	
9.2570400E+20	7.7142000E+18	1.6843142E-22	1.0000368E+48	
9.2570400E+20	1.5428400E+19	5.3002566E-23	2.5174547E+48	
9.2570400E+20	2.3142600E+19	1.9655308E-23	3.1505634E+48	
9.2570400E+20	3.0856800E+19	1.0018535E-23	3.8061558E+48	
9.2570400E+20	3.8571000E+19	5.2438441E-24	3.8905216E+48	
9.2570400E+20	4.6285200E+19	4.4687661E-24	5.7282637E+48	
9.2570400E+20	5.3999400E+19	2.2244832E-24	4.5271653E+48	
			Σ - 2.4620161E+49	
8.4856200E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	5.7299345E+48	3.2630638E+49
8.4856200E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	7.3332202E+48	
8.4856200E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	7.7876493E+48	
8.4856200E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	6.8447136E+48	
8.4856200E+20	3.8571000E+19	1.0018535E-23	6.8131041E+48	
8.4856200E+20	4.6285200E+19	5.2438441E-24	6.1610574E+48	
8.4856200E+20	5.3999400E+19	4.4687661E-24	8.3356601E+48	
8.4856200E+20	6.1713600E+19	2.2244832E-24	6.1922635E+48	
			Σ + 5.5197603E+49	
8.4856200E+20	7.7142000E+18	1.6843142E-22	9.1669798E+47	
8.4856200E+20	1.5428400E+19	5.3002566E-23	2.3076424E+48	
8.4856200E+20	2.3142600E+19	1.9655308E-23	2.8879478E+48	
8.4856200E+20	3.0856800E+19	1.0018535E-23	3.4888287E+48	
8.4856200E+20	3.8571000E+19	5.2438441E-24	3.5660759E+48	
8.4856200E+20	4.6285200E+19	4.4687661E-24	5.2504087E+48	
8.4856200E+20	5.3999400E+19	2.2244832E-24	4.1493637E+48	
			Σ - 2.2566965E+49	
7.7142000E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	5.2090133E+48	2.9661566E+49
7.7142000E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	6.6664712E+48	
7.7142000E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	7.0794599E+48	
7.7142000E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	6.2221211E+48	
7.7142000E+20	3.8571000E+19	1.0018535E-23	6.1931930E+48	
7.7142000E+20	4.6285200E+19	5.2438441E-24	5.6002603E+48	
7.7142000E+20	5.3999400E+19	4.4687661E-24	7.5765813E+48	
7.7142000E+20	6.1713600E+19	2.2244832E-24	5.6280764E+48	
			Σ + 5.0175177E+49	
7.7142000E+20	7.7142000E+18	1.6843142E-22	8.3335891E+47	

7.7142000E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 2.0978276E+48
 7.7142000E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 2.6253251E+48
 7.7142000E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 3.1714862E+48
 7.7142000E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 3.2416055E+48
 7.7142000E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 4.7725014E+48
 7.7142000E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 3.7715059E+48

Σ^- 2.0513611E+49

6.9427800E+20 7.7142000E+18 1.0528015E-21 4.6880900E+48 2.6692185E+49

6.9427800E+20 1.5428400E+19 1.6843142E-22 5.9997115E+48
 6.9427800E+20 2.3142600E+19 5.3002566E-23 6.3712448E+48
 6.9427800E+20 3.0856800E+19 1.9655308E-23 5.5994883E+48
 6.9427800E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 5.5732191E+48
 6.9427800E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 5.0393815E+48
 6.9427800E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 6.8173517E+48
 6.9427800E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 5.0637429E+48

Σ^+ 4.5152230E+49

6.9427800E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 7.5001950E+47
 6.9427800E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.8880094E+48
 6.9427800E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 2.3626928E+48
 6.9427800E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 2.8541231E+48
 6.9427800E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 2.9171024E+48
 6.9427800E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 4.2945245E+48
 6.9427800E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 3.3935731E+48

Σ^- 1.8460045E+49

6.1713300E+20 7.7142000E+18 1.0528015E-21 4.1671435E+48 2.3722263E+49

6.1713300E+20 1.5428400E+19 1.6843142E-22 5.3329110E+48
 6.1713300E+20 2.3142600E+19 5.3002566E-23 5.6629667E+48
 6.1713300E+20 3.0856800E+19 1.9655308E-23 4.9767759E+48
 6.1713300E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 4.9531348E+48
 6.1713300E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 4.4783683E+48
 6.1713300E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 6.0578849E+48
 6.1713300E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 4.4991856E+48

Σ^+ 4.0128371E+49

6.1713300E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 6.6667639E+47
 6.1713300E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.6781784E+48
 6.1713300E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 2.1000371E+48
 6.1713300E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 2.5367195E+48
 6.1713300E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 2.5925414E+48
 6.1713300E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 3.8164331E+48
 6.1713300E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 3.0155222E+48

Σ^- 1.6406108E+49

5.3999400E+20 7.7142000E+18 1.0528015E-21 3.6462334E+48 2.0751962E+49

5.3999400E+20 1.5428400E+19 1.6843142E-22 4.6661412E+48

5.3999400E+20 2.3142600E+19 5.3002566E-23 4.9546930E+48
 5.3999400E+20 3.0856800E+19 1.9655308E-23 4.3540326E+48
 5.3999400E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 4.3329754E+48
 5.3999400E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 3.9172378E+48
 5.3999400E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 5.2981803E+48
 5.3999400E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 3.9343835E+48

$\xi + 3.5103877E+49$

5.3999400E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 5.8333909E+47
 5.3999400E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.4683570E+48
 5.3999400E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 1.8373831E+48
 5.3999400E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 2.2193002E+48
 5.3999400E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 2.2679411E+48
 5.3999400E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 3.3382418E+48
 5.3999400E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 2.6373529E+48

$\xi - 1.4351915E+49$

4.7303700E+20 7.7142000E+18 1.0528015E-21 3.1940762E+48 1.8173002E+49

4.7303700E+20 1.5428400E+19 1.6843142E-22 4.0873568E+48
 4.7303700E+20 2.3142600E+19 5.3002566E-23 4.3398480E+48
 4.7303700E+20 3.0856800E+19 1.9655308E-23 3.8133944E+48
 4.7303700E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 3.7945273E+48
 4.7303700E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 3.4299822E+48
 4.7303700E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 4.6383993E+48
 4.7303700E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 3.4437882E+48

$\xi + 3.0741373E+49$

4.7303700E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 5.1100116E+47
 4.7303700E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.2862232E+48
 4.7303700E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 1.6093758E+48
 4.7303700E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 1.9437307E+48
 4.7303700E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 1.9861097E+48
 4.7303700E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 2.9230061E+48
 4.7303700E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 2.3089240E+48

$\xi - 1.2568371E+49$

3.8571000E+20 7.7142000E+18 1.0528015E-21 2.6043504E+48 1.4807829E+49

3.8571000E+20 1.5428400E+19 1.6843142E-22 3.3324353E+48
 3.8571000E+20 2.3142600E+19 5.3002566E-23 3.5378169E+48
 3.8571000E+20 3.0856800E+19 1.9655308E-23 3.1080695E+48
 3.8571000E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 3.0919409E+48
 3.8571000E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 2.7940619E+48
 3.8571000E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 3.7771028E+48
 3.8571000E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 2.8031685E+48

$\xi + 2.5048946E+49$

3.8571000E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 4.1665445E+47
 3.8571000E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.0486620E+48
 3.8571000E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 1.3119531E+48

3.8571000E+20	3.0856800E+19	1.0018535E-23	1.5842186E+48	
3.8571000E+20	3.8571000E+19	5.2438441E-24	1.6183660E+48	
3.8571000E+20	4.6285200E+19	4.4687661E-24	2.3810794E+48	
3.8571000E+20	5.3999400E+19	2.2244832E-24	1.8801838E+48	
			$\xi -$ 1.0241117E+49	
3.0856800E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	2.0833865E+48	1.1832441E+49
3.0856800E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	2.6654680E+48	
3.0856800E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	2.8291050E+48	
3.0856800E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	2.4846589E+48	
3.0856800E+20	3.8571000E+19	1.0018535E-23	2.4707541E+48	
3.0856800E+20	4.6285200E+19	5.2438441E-24	2.2315986E+48	
3.0856800E+20	5.3999400E+19	4.4687661E-24	3.0149446E+48	
3.0856800E+20	6.1713600E+19	2.2244832E-24	2.2359811E+48	
			$\xi +$ 2.0015897E+49	
3.0856800E+20	7.7142000E+18	1.6843142E-22	3.3330856E+47	
3.0856800E+20	1.5428400E+19	5.3002566E-23	8.3877843E+47	
3.0856800E+20	2.3142600E+19	1.9655308E-23	1.0491366E+48	
3.0856800E+20	3.0856800E+19	1.0018535E-23	1.2664590E+48	
3.0856800E+20	3.8571000E+19	5.2438441E-24	1.2932280E+48	
3.0856800E+20	4.6285200E+19	4.4687661E-24	1.9017522E+48	
3.0856800E+20	5.3999400E+19	2.2244832E-24	1.5007931E+48	
			$\xi -$ 8.1834559E+48	
2.3142600E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	1.5623879E+48	8.8518210E+48
2.3142600E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	1.9983224E+48	
2.3142600E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	2.1199659E+48	
2.3142600E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	1.8605780E+48	
2.3142600E+20	3.8571000E+19	1.0018535E-23	1.8485192E+48	
2.3142600E+20	4.6285200E+19	5.2438441E-24	1.6677610E+48	
2.3142600E+20	5.3999400E+19	4.4687661E-24	2.2502349E+48	
2.3142600E+20	6.1713600E+19	2.2244832E-24	1.6662947E+48	
			$\xi +$ 1.4974064E+49	
2.3142600E+20	7.7142000E+18	1.6843142E-22	2.4995711E+47	
2.3142600E+20	1.5428400E+19	5.3002566E-23	6.2883881E+47	
2.3142600E+20	2.3142600E+19	1.9655308E-23	7.8616160E+47	
2.3142600E+20	3.0856800E+19	1.0018535E-23	9.4835784E+47	
2.3142600E+20	3.8571000E+19	5.2438441E-24	9.6754129E+47	
2.3142600E+20	4.6285200E+19	4.4687661E-24	1.4212539E+48	
2.3142600E+20	5.3999400E+19	2.2244832E-24	1.1201324E+48	
			$\xi -$ 6.1222430E+48	
1.5428400E+20	7.7142000E+18	1.0528015E-21	1.0413024E+48	5.8577508E+48
1.5428400E+20	1.5428400E+19	1.6843142E-22	1.3307303E+48	
1.5428400E+20	2.3142600E+19	5.3002566E-23	1.4097536E+48	
1.5428400E+20	3.0856800E+19	1.9655308E-23	1.2348064E+48	

1.5428400E+20 3.8571000E+19 1.0018535E-23 1.2236264E+48
 1.5428400E+20 4.6285200E+19 5.2438441E-24 1.1004165E+48
 1.5428400E+20 5.3999400E+19 4.4687661E-24 1.4789636E+48
 1.5428400E+20 6.1713600E+19 2.2244832E-24 1.0901215E+48

$\Sigma + 9.9097208E+48$

1.5428400E+20 7.7142000E+18 1.6843142E-22 1.6659175E+47
 1.5428400E+20 1.5428400E+19 5.3002566E-23 4.1875869E+47
 1.5428400E+20 2.3142600E+19 1.9655308E-23 5.2278868E+47
 1.5428400E+20 3.0856800E+19 1.0018535E-23 6.2939492E+47
 1.5428400E+20 3.8571000E+19 5.2438441E-24 6.4046353E+47
 1.5428400E+20 4.6285200E+19 4.4687661E-24 9.3776701E+47
 1.5428400E+20 5.3999400E+19 2.2244832E-24 7.3620539E+47

$\Sigma - 4.0519700E+48$

9.5656080E+19 7.7142000E+18 1.0528015E-21 6.4508961E+47 3.5506865E+48

9.5656080E+19 1.5428400E+19 1.6843142E-22 8.2239115E+47
 9.5656080E+19 2.3142600E+19 5.3002566E-23 8.6764494E+47
 9.5656080E+19 3.0856800E+19 1.9655308E-23 7.5548035E+47
 9.5656080E+19 3.8571000E+19 1.0018535E-23 7.4274085E+47
 9.5656080E+19 4.6285200E+19 5.2438441E-24 6.6120808E+47
 9.5656080E+19 5.3999400E+19 4.4687661E-24 8.7741061E+47
 9.5656080E+19 6.1713600E+19 2.2244832E-24 6.3654892E+47

$\Sigma + 6.0085145E+48$

9.5656080E+19 7.7142000E+18 1.6843142E-22 1.0320403E+47
 9.5656080E+19 1.5428400E+19 5.3002566E-23 2.5879282E+47
 9.5656080E+19 2.3142600E+19 1.9655308E-23 3.2175477E+47
 9.5656080E+19 3.0856800E+19 1.0018535E-23 3.8507696E+47
 9.5656080E+19 3.8571000E+19 5.2438441E-24 3.8876115E+47
 9.5656080E+19 4.6285200E+19 4.4687661E-24 5.6347676E+47
 9.5656080E+19 5.3999400E+19 2.2244832E-24 4.3676154E+47

$\Sigma - 2.4578280E+48$

6.1713600E+19 7.7142000E+18 1.0528015E-21 4.1542420E+47 2.1510818E+48

6.1713600E+19 1.5428400E+19 1.6843142E-22 5.2663256E+47
 6.1713600E+19 2.3142600E+19 5.3002566E-23 5.5019102E+47
 6.1713600E+19 3.0856800E+19 1.9655308E-23 4.7205960E+47
 6.1713600E+19 3.8571000E+19 1.0018535E-23 4.5447027E+47
 6.1713600E+19 4.6285200E+19 5.2438441E-24 3.9280708E+47
 6.1713600E+19 5.3999400E+19 4.4687661E-24 4.9942956E+47
 6.1713600E+19 6.1713600E+19 2.2244832E-24 3.3812853E+47

$\Sigma + 3.6491428E+48$

6.1713600E+19 7.7142000E+18 1.6843142E-22 6.6461235E+46
 6.1713600E+19 1.5428400E+19 5.3002566E-23 1.6572251E+47
 6.1713600E+19 2.3142600E+19 1.9655308E-23 2.0403114E+47
 6.1713600E+19 3.0856800E+19 1.0018535E-23 2.4061417E+47
 6.1713600E+19 3.8571000E+19 5.2438441E-24 2.3787622E+47

6.1713600E+19 4.6285200E+19 4.4687661E-24 3.3474736E+47
6.1713600E+19 5.3999400E+19 2.2244832E-24 2.4860837E+47
 $\Sigma -$ 1.4980610E+48

1.5428400E+19 7.7142000E+18 1.0528015E-21 9.8769648E+46 2.2579504E+47
1.5428400E+19 1.5428400E+19 1.6843142E-22 1.0000825E+47
1.5428400E+19 2.3142600E+19 5.3002566E-23 5.6923232E+46
1.5428400E+19 3.0856800E+19 1.9655308E-23 2.9503725E+46
1.5428400E+19 3.8571000E+19 1.0018535E-23 1.9178297E+46
1.5428400E+19 4.6285200E+19 5.2438441E-24 1.2172675E+46
1.5428400E+19 5.3999400E+19 4.4687661E-24 1.2177491E+46
1.5428400E+19 6.1713600E+19 2.2244832E-24 6.9552657E+45

$\Sigma +$ 3.3568858E+47

1.5428400E+19 7.7142000E+18 1.6843142E-22 1.5801566E+46
1.5428400E+19 1.5428400E+19 5.3002566E-23 3.1470933E+46
1.5428400E+19 2.3142600E+19 1.9655308E-23 2.1109236E+46
1.5428400E+19 3.0856800E+19 1.0018535E-23 1.5038385E+46
1.5428400E+19 3.8571000E+19 5.2438441E-24 1.0038194E+46
1.5428400E+19 4.6285200E+19 4.4687661E-24 1.0373465E+46
1.5428400E+19 5.3999400E+19 2.2244832E-24 6.0617683E+45

$\Sigma -$ 1.0989355E+47

ANEXO II (Disco)

R(m)	d(m)	s(W/m ²)	E(Joule)	E ^{total} (Joule)
9.2570400E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	1.5835931E+49	8.0904303E+49
9.2570400E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	1.7522626E+49	
9.2570400E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	2.2370531E+49	
9.2570400E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	2.7671854E+49	
9.2570400E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	3.3821805E+49	
9.2570400E+20	2.6999700E+20	4.485061180E-05	3.1261736E+49	
9.2570400E+20	3.0856800E+20	3.355230870E-05	3.0407564E+49	
9.2570400E+20	3.4713900E+20	3.063461340E-05	3.4955512E+49	
9.2570400E+20	3.8571000E+20	2.440613370E-05	3.4178461E+49	
9.2570400E+20	4.2428100E+20	1.421318520E-05	2.3924753E+49	
9.2570400E+20	4.7303700E+20	9.793931200E-06	2.0298783E+49	
			$\Sigma+$ 2.9224956E+50	
9.2570400E+20	6.1713600E+19	1.787276788E-04	6.5983125E+48	
9.2570400E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	1.0279270E+49	
9.2570400E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	1.4700928E+49	
9.2570400E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	1.7756893E+49	
9.2570400E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	2.3564011E+49	
9.2570400E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	2.3057248E+49	
9.2570400E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	2.3386602E+49	
9.2570400E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	2.7763334E+49	
9.2570400E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	2.7848528E+49	
9.2570400E+20	3.8571000E+20	1.421318520E-05	1.9904209E+49	
9.2570400E+20	4.2428100E+20	9.793931200E-06	1.6485916E+49	
			$\Sigma-$ 2.1134525E+50	
8.4856200E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	1.4511336E+49	7.3766201E+49
8.4856200E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	1.6053055E+49	
8.4856200E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	2.0488041E+49	
8.4856200E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	2.5330276E+49	
8.4856200E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	3.0940111E+49	
8.4856200E+20	2.6999700E+20	4.485061180E-05	2.8576198E+49	
8.4856200E+20	3.0856800E+20	3.355230870E-05	2.7770153E+49	
8.4856200E+20	3.4713900E+20	3.063461340E-05	3.1889807E+49	
8.4856200E+20	3.8571000E+20	2.440613370E-05	3.1142735E+49	
8.4856200E+20	4.2428100E+20	1.421318520E-05	2.1769121E+49	
8.4856200E+20	4.7303700E+20	9.793931200E-06	1.8431656E+49	
			$\Sigma+$ 2.6690249E+50	
8.4856200E+20	6.1713600E+19	1.787276788E-04	6.0475997E+48	
8.4856200E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	9.4194608E+48	
8.4856200E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	1.3468005E+49	
8.4856200E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	1.6262643E+49	
8.4856200E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	2.1570037E+49	
8.4856200E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	2.1092718E+49	
8.4856200E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	2.1377577E+49	
8.4856200E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	2.5355272E+49	
8.4856200E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	2.5406128E+49	

8.4856200E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 1.8136320E+49
8.4856200E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.5000527E+49
 $\Sigma -$ 1.9313629E+50

7.7142000E+20 9.5656080E+19 1.787276788E-04 1.3186221E+49 6.6579843E+49
7.7142000E+20 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.4582496E+49
7.7142000E+20 1.5428400E+20 9.733208930E-05 1.8603607E+49
7.7142000E+20 1.9285500E+20 7.725858210E-05 2.2984872E+49
7.7142000E+20 2.3142600E+20 6.578966760E-05 2.8051528E+49
7.7142000E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 2.5881752E+49
7.7142000E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 2.5121054E+49
7.7142000E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 2.8806444E+49
7.7142000E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 2.8084740E+49
7.7142000E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 1.9593657E+49
7.7142000E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.6542002E+49
 $\Sigma +$ 2.4143837E+50

7.7142000E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 5.4967977E+48
7.7142000E+20 9.5656080E+19 1.160140194E-04 8.5593151E+48
7.7142000E+20 1.2497004E+20 9.733208930E-05 1.2234252E+49
7.7142000E+20 1.5428400E+20 7.725858210E-05 1.4766849E+49
7.7142000E+20 1.9285500E+20 6.578966760E-05 1.9572804E+49
7.7142000E+20 2.3142600E+20 4.485061180E-05 1.9123492E+49
7.7142000E+20 2.6999700E+20 3.355230870E-05 1.9361888E+49
7.7142000E+20 3.0856800E+20 3.063461340E-05 2.2936537E+49
7.7142000E+20 3.4713900E+20 2.440613370E-05 2.2949658E+49
7.7142000E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 1.6355463E+49
7.7142000E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.3501473E+49
 $\Sigma -$ 1.7485853E+50

6.9427800E+20 9.5656080E+19 1.787276788E-04 1.1860414E+49 5.9325406E+49
6.9427800E+20 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.3110614E+49
6.9427800E+20 1.5428400E+20 9.733208930E-05 1.6716565E+49
6.9427800E+20 1.9285500E+20 7.725858210E-05 2.0634318E+49
6.9427800E+20 2.3142600E+20 6.578966760E-05 2.5153632E+49
6.9427800E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 2.3175198E+49
6.9427800E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 2.2455959E+49
6.9427800E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 2.5698712E+49
6.9427800E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 2.4995709E+49
6.9427800E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 1.7390211E+49
6.9427800E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.4619931E+49
 $\Sigma +$ 2.1581126E+50

6.9427800E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 4.9458764E+48
6.9427800E+20 9.5656080E+19 1.160140194E-04 7.6987196E+48
6.9427800E+20 1.2497004E+20 9.733208930E-05 1.0999390E+49
6.9427800E+20 1.5428400E+20 7.725858210E-05 1.3268986E+49
6.9427800E+20 1.9285500E+20 6.578966760E-05 1.7571186E+49

6.9427800E+20 2.3142600E+20 4.485061180E-05 1.7147917E+49
 6.9427800E+20 2.6999700E+20 3.355230870E-05 1.7337141E+49
 6.9427800E+20 3.0856800E+20 3.063461340E-05 2.0503198E+49
 6.9427800E+20 3.4713900E+20 2.440613370E-05 2.0473776E+49
 6.9427800E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 1.4556531E+49
 6.9427800E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.1983136E+49
 $\xi - 1.5648586E+50$

6.1713300E+20 9.5656080E+19 1.787276788E-04 1.0533599E+49 5.1968736E+49
 6.1713300E+20 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.1636847E+49
 6.1713300E+20 1.5428400E+20 9.733208930E-05 1.4825837E+49
 6.1713300E+20 1.9285500E+20 7.725858210E-05 1.8276499E+49
 6.1713300E+20 2.3142600E+20 6.578966760E-05 2.2242570E+49
 6.1713300E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 2.0451435E+49
 6.1713300E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 1.9767943E+49
 6.1713300E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 2.2555676E+49
 6.1713300E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 2.1861059E+49
 6.1713300E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 1.5144859E+49
 6.1713300E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.2647716E+49
 $\xi + 1.8994404E+50$

6.1713300E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 4.3947696E+48
 6.1713300E+20 9.5656080E+19 1.160140194E-04 6.8374701E+48
 6.1713300E+20 1.2497004E+20 9.733208930E-05 9.7629462E+48
 6.1713300E+20 1.5428400E+20 7.725858210E-05 1.1768196E+49
 6.1713300E+20 1.9285500E+20 6.578966760E-05 1.5563382E+49
 6.1713300E+20 2.3142600E+20 4.485061180E-05 1.5163367E+49
 6.1713300E+20 2.6999700E+20 3.355230870E-05 1.5299521E+49
 6.1713300E+20 3.0856800E+20 3.063461340E-05 1.8048931E+49
 6.1713300E+20 3.4713900E+20 2.440613370E-05 1.7969767E+49
 6.1713300E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 1.2731032E+49
 6.1713300E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.0435923E+49
 $\xi - 1.3797530E+50$

5.3999400E+20 9.5656080E+19 1.787276788E-04 9.2055160E+48 4.4444355E+49
 5.3999400E+20 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.0160564E+49
 5.3999400E+20 1.5428400E+20 9.733208930E-05 1.2930032E+49
 5.3999400E+20 1.9285500E+20 7.725858210E-05 1.5908426E+49
 5.3999400E+20 2.3142600E+20 6.578966760E-05 1.9312566E+49
 5.3999400E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 1.7702472E+49
 5.3999400E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 1.7045723E+49
 5.3999400E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 1.9358782E+49
 5.3999400E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 1.8654887E+49
 5.3999400E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 1.2831410E+49
 5.3999400E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.0588362E+49
 $\xi + 1.6369874E+50$
 5.3999400E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 3.8434708E+48

5.3999400E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	5.9753974E+48
5.3999400E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	8.5243916E+48
5.3999400E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	1.0263378E+49
5.3999400E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	1.3546845E+49
5.3999400E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	1.3165903E+49
5.3999400E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	1.3243048E+49
5.3999400E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	1.5563434E+49
5.3999400E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	1.5422849E+49
5.3999400E+20	3.8571000E+20	1.421318520E-05	1.0863882E+49
5.3999400E+20	4.2428100E+20	9.793931200E-06	8.8417866E+48
		$\xi -$	1.1925439E+50

4.7303700E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	8.0510925E+48	3.7641904E+49
4.7303700E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	8.8759815E+48	
4.7303700E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	1.1278152E+49	
4.7303700E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	1.3840181E+49	
4.7303700E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	1.6745590E+49	
4.7303700E+20	2.6999700E+20	4.485061180E-05	1.5284354E+49	
4.7303700E+20	3.0856800E+20	3.355230870E-05	1.4638451E+49	
4.7303700E+20	3.4713900E+20	3.063461340E-05	1.6511836E+49	
4.7303700E+20	3.8571000E+20	2.440613370E-05	1.5771912E+49	
4.7303700E+20	4.2428100E+20	1.421318520E-05	1.0721223E+49	
4.7303700E+20	4.7303700E+20	9.793931200E-06	8.6412051E+48	
		$\xi +$	1.4035998E+50	

4.7303700E+20	6.1713600E+19	1.787276788E-04	3.3646609E+48
4.7303700E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	5.2260490E+48
4.7303700E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	7.4466675E+48
4.7303700E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	8.9521765E+48
4.7303700E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	1.1785628E+49
4.7303700E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	1.1415926E+49
4.7303700E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	1.1434077E+49
4.7303700E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	1.3365497E+49
4.7303700E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	1.3154730E+49
4.7303700E+20	3.8571000E+20	1.421318520E-05	9.1849494E+48
4.7303700E+20	4.2428100E+20	9.793931200E-06	7.3877122E+48
		$\xi -$	1.0271807E+50

3.8571000E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	6.5417603E+48	2.8018880E+49
3.8571000E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	7.1934063E+48	
3.8571000E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	9.1092266E+48	
3.8571000E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	1.1112920E+49	
3.8571000E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	1.3340805E+49	
3.8571000E+20	2.6999700E+20	4.485061180E-05	1.2051098E+49	
3.8571000E+20	3.0856800E+20	3.355230870E-05	1.1382799E+49	
3.8571000E+20	3.4713900E+20	3.063461340E-05	1.2594227E+49	
3.8571000E+20	3.8571000E+20	2.440613370E-05	1.1673837E+49	

3.8571000E+20	4.2428100E+20	1.421318520E-05	7.5402234E+48
3.8571000E+20	4.7303700E+20	9.793931200E-06	5.7241339E+48
		$\Sigma+$	1.0826444E+50
3.8571000E+20	6.1713600E+19	1.787276788E-04	2.7395567E+48
3.8571000E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	4.2463255E+48
3.8571000E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	6.0350402E+48
3.8571000E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	7.2305643E+48
3.8571000E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	9.4632242E+48
3.8571000E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	9.0947909E+48
3.8571000E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	9.0153095E+48
3.8571000E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	1.0392956E+49
3.8571000E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	1.0033630E+49
3.8571000E+20	3.8571000E+20	1.421318520E-05	6.7983895E+48
3.8571000E+20	4.2428100E+20	9.793931200E-06	5.1957692E+48
		$\Sigma-$	8.0245556E+49

3.0856800E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	5.2022505E+48	1.9276375E+49
3.0856800E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	5.6948499E+48	
3.0856800E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	7.1681560E+48	
3.0856800E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	8.6503045E+48	
3.0856800E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	1.0225604E+49	
3.0856800E+20	2.6999700E+20	4.485061180E-05	9.0309139E+48	
3.0856800E+20	3.0856800E+20	3.355230870E-05	8.2168810E+48	
3.0856800E+20	3.4713900E+20	3.063461340E-05	8.5011837E+48	
3.0856800E+20	3.8571000E+20	2.440613370E-05	7.4169953E+48	
3.0856800E+20	4.2428100E+20	1.421318520E-05	4.6423040E+48	
3.0856800E+20	4.7303700E+20	9.793931200E-06	3.4442587E+48	
		$\Sigma+$	7.8193701E+49	

3.0856800E+20	6.1713600E+19	1.787276788E-04	2.1863158E+48
3.0856800E+20	9.5656080E+19	1.160140194E-04	3.3768356E+48
3.0856800E+20	1.2497004E+20	9.733208930E-05	4.7777987E+48
3.0856800E+20	1.5428400E+20	7.725858210E-05	5.6898148E+48
3.0856800E+20	1.9285500E+20	6.578966760E-05	7.3661805E+48
3.0856800E+20	2.3142600E+20	4.485061180E-05	6.9710730E+48
3.0856800E+20	2.6999700E+20	3.355230870E-05	6.7559393E+48
3.0856800E+20	3.0856800E+20	3.063461340E-05	7.5023443E+48
3.0856800E+20	3.4713900E+20	2.440613370E-05	6.7727646E+48
3.0856800E+20	3.8571000E+20	1.421318520E-05	4.3193703E+48
3.0856800E+20	4.2428100E+20	9.793931200E-06	3.1988893E+48
		$\Sigma-$	5.8917326E+49

2.3142600E+20	9.5656080E+19	1.787276788E-04	3.8503958E+48	1.1231850E+49
2.3142600E+20	1.2497004E+20	1.160140194E-04	4.1712850E+48	
2.3142600E+20	1.5428400E+20	9.733208930E-05	5.1734311E+48	
2.3142600E+20	1.9285500E+20	7.725858210E-05	6.0622554E+48	
2.3142600E+20	2.3142600E+20	6.578966760E-05	6.7971377E+48	

2.3142600E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 5.4268137E+48
2.3142600E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 4.5207357E+48
2.3142600E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 4.4809961E+48
2.3142600E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 3.8144689E+48
2.3142600E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 2.3477266E+48
2.3142600E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.7156113E+48

$\xi+$ 4.8360857E+49

2.3142600E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 1.6310467E+48
2.3142600E+20 9.5656080E+19 1.160140194E-04 2.4993325E+48
2.3142600E+20 1.2497004E+20 9.733208930E-05 3.4995761E+48
2.3142600E+20 1.5428400E+20 7.725858210E-05 4.1064767E+48
2.3142600E+20 1.9285500E+20 6.578966760E-05 5.1623232E+48
2.3142600E+20 2.3142600E+20 4.485061180E-05 4.6337943E+48
2.3142600E+20 2.6999700E+20 3.355230870E-05 4.0597468E+48
2.3142600E+20 3.0856800E+20 3.063461340E-05 4.1276143E+48
2.3142600E+20 3.4713900E+20 2.440613370E-05 3.5699419E+48
2.3142600E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 2.2213987E+48
2.3142600E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.6177565E+48

$\xi-$ 3.7129008E+49

1.5428400E+20 9.5656080E+19 1.787276788E-04 2.4646528E+48 4.6559081E+48

1.5428400E+20 1.2497004E+20 1.160140194E-04 2.5723617E+48
1.5428400E+20 1.5428400E+20 9.733208930E-05 2.9795498E+48
1.5428400E+20 1.9285500E+20 7.725858210E-05 2.9348490E+48
1.5428400E+20 2.3142600E+20 6.578966760E-05 2.8513208E+48
1.5428400E+20 2.6999700E+20 4.485061180E-05 2.1376685E+48
1.5428400E+20 3.0856800E+20 3.355230870E-05 1.7216822E+48
1.5428400E+20 3.4713900E+20 3.063461340E-05 1.6691181E+48
1.5428400E+20 3.8571000E+20 2.440613370E-05 1.3982864E+48
1.5428400E+20 4.2428100E+20 1.421318520E-05 8.5014556E+47
1.5428400E+20 4.7303700E+20 9.793931200E-06 6.1383178E+47

$\xi+$ 2.2193467E+49

1.5428400E+20 6.1713600E+19 1.787276788E-04 1.0705261E+48
1.5428400E+20 9.5656080E+19 1.160140194E-04 1.5998321E+48
1.5428400E+20 1.2497004E+20 9.733208930E-05 2.1581300E+48
1.5428400E+20 1.5428400E+20 7.725858210E-05 2.3650555E+48
1.5428400E+20 1.9285500E+20 6.578966760E-05 2.4991753E+48
1.5428400E+20 2.3142600E+20 4.485061180E-05 1.9438232E+48
1.5428400E+20 2.6999700E+20 3.355230870E-05 1.5991691E+48
1.5428400E+20 3.0856800E+20 3.063461340E-05 1.5719654E+48
1.5428400E+20 3.4713900E+20 2.440613370E-05 1.3297612E+48
1.5428400E+20 3.8571000E+20 1.421318520E-05 8.1430771E+47
1.5428400E+20 4.2428100E+20 9.793931200E-06 5.8581289E+47

$\xi-$ 1.7537558E+49

9.5656080E+19 9.5656080E+19 1.787276788E-04 1.3039516E+48 1.3683228E+48

9.5656080E+19 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.0870936E+48
9.5656080E+19 1.5428400E+20 9.733208930E-05 1.0529558E+48
9.5656080E+19 1.9285500E+20 7.725858210E-05 9.4883318E+47
9.5656080E+19 2.3142600E+20 6.578966760E-05 8.8465637E+47
9.5656080E+19 2.6999700E+20 4.485061180E-05 6.4669921E+47
9.5656080E+19 3.0856800E+20 3.355230870E-05 5.1181919E+47
9.5656080E+19 3.4713900E+20 3.063461340E-05 4.8976736E+47
9.5656080E+19 3.8571000E+20 2.440613370E-05 4.0613577E+47
9.5656080E+19 4.2428100E+20 1.421318520E-05 2.4489615E+47
9.5656080E+19 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.7532656E+47

$\Sigma +$ 7.7521348E+48

9.5656080E+19 6.1713600E+19 1.787276788E-04 6.3193386E+47
9.5656080E+19 9.5656080E+19 1.160140194E-04 8.4640875E+47
9.5656080E+19 1.2497004E+20 9.733208930E-05 9.1203712E+47
9.5656080E+19 1.5428400E+20 7.725858210E-05 8.3579701E+47
9.5656080E+19 1.9285500E+20 6.578966760E-05 8.0798040E+47
9.5656080E+19 2.3142600E+20 4.485061180E-05 6.0309439E+47
9.5656080E+19 2.6999700E+20 3.355230870E-05 4.8378942E+47
9.5656080E+19 3.0856800E+20 3.063461340E-05 4.6731160E+47
9.5656080E+19 3.4713900E+20 2.440613370E-05 3.9019026E+47
9.5656080E+19 3.8571000E+20 1.421318520E-05 2.3651771E+47
9.5656080E+19 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.6875148E+47

$\Sigma -$ 6.3838120E+48

6.1713600E+19 9.5656080E+19 1.787276788E-04 5.0640168E+47 3.2843158E+47

6.1713600E+19 1.2497004E+20 1.160140194E-04 3.8349425E+47
6.1713600E+19 1.5428400E+20 9.733208930E-05 3.5688899E+47
6.1713600E+19 1.9285500E+20 7.725858210E-05 3.1236847E+47
6.1713600E+19 2.3142600E+20 6.578966760E-05 2.8604501E+47
6.1713600E+19 2.6999700E+20 4.485061180E-05 2.0650001E+47
6.1713600E+19 3.0856800E+20 3.355230870E-05 1.6190625E+47
6.1713600E+19 3.4713900E+20 3.063461340E-05 1.5379466E+47
6.1713600E+19 3.8571000E+20 2.440613370E-05 1.2677263E+47
6.1713600E+19 4.2428100E+20 1.421318520E-05 7.6062326E+46
6.1713600E+19 4.7303700E+20 9.793931200E-06 5.4168603E+46

$\Sigma +$ 2.6244029E+48

6.1713600E+19 6.1713600E+19 1.787276788E-04 3.5015988E+47
6.1713600E+19 9.5656080E+19 1.160140194E-04 3.2871066E+47
6.1713600E+19 1.2497004E+20 9.733208930E-05 3.2173954E+47
6.1713600E+19 1.5428400E+20 7.725858210E-05 2.8328517E+47
6.1713600E+19 1.9285500E+20 6.578966760E-05 2.6599786E+47
6.1713600E+19 2.3142600E+20 4.485061180E-05 1.9500469E+47
6.1713600E+19 2.6999700E+20 3.355230870E-05 1.5448066E+47
6.1713600E+19 3.0856800E+20 3.063461340E-05 1.4782694E+47
6.1713600E+19 3.4713900E+20 2.440613370E-05 1.2252588E+47
6.1713600E+19 3.8571000E+20 1.421318520E-05 7.3827460E+46

6.1713600E+19 4.2428100E+20 9.793931200E-06 5.2412544E+46
 Σ^- 2.2959713E+48

1.5428400E+19 9.5656080E+19 1.787276788E-04 1.4468664E+46 4.6175078E+45
1.5428400E+19 1.2497004E+20 1.160140194E-04 1.0190670E+46
1.5428400E+19 1.5428400E+20 9.733208930E-05 9.0771819E+45
1.5428400E+19 1.9285500E+20 7.725858210E-05 7.6481595E+45
1.5428400E+19 2.3142600E+20 6.578966760E-05 6.8208819E+45
1.5428400E+19 2.6999700E+20 4.485061180E-05 4.8275012E+45
1.5428400E+19 3.0856800E+20 3.355230870E-05 3.7264222E+45
1.5428400E+19 3.4713900E+20 3.063461340E-05 3.4949908E+45
1.5428400E+19 3.8571000E+20 2.440613370E-05 2.8504046E+45
1.5428400E+19 4.2428100E+20 1.421318520E-05 1.6947313E+45
1.5428400E+19 4.7303700E+20 9.793931200E-06 1.1951348E+45
 Σ^+ 6.5994742E+46

1.5428400E+19 6.1713600E+19 1.787276788E-04 1.2441964E+46
1.5428400E+19 9.5656080E+19 1.160140194E-04 9.3917626E+45
1.5428400E+19 1.2497004E+20 9.733208930E-05 8.5496493E+45
1.5428400E+19 1.5428400E+20 7.725858210E-05 7.2051284E+45
1.5428400E+19 1.9285500E+20 6.578966760E-05 6.5128023E+45
1.5428400E+19 2.3142600E+20 4.485061180E-05 4.6499813E+45
1.5428400E+19 2.6999700E+20 3.355230870E-05 3.6114070E+45
1.5428400E+19 3.0856800E+20 3.063461340E-05 3.4023741E+45
1.5428400E+19 3.4713900E+20 2.440613370E-05 2.7844063E+45
1.5428400E+19 3.8571000E+20 1.421318520E-05 1.6599650E+45
1.5428400E+19 4.2428100E+20 9.793931200E-06 1.1677946E+45
 Σ^- 6.1377235E+46